Schüler-SimuLab Kurs 4

Kursreihe stochastische Simulationen

Weitere stochastische Simulationen

Stefan Hartmann

Forschungszentrum caesar

Simulation 1: Das Stockproblem

Man zerbricht einen Stock zufällig in drei Teile. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man damit ein Dreieck legen kann?

Gruppenaufgabe:

Wie verstehst du diese Aufgabe? Gibt es eventuell auch noch andere Möglichkeiten, wie die Aufgabenstellung interpretiert werden könnte? Welche möglichen Interpretationen fallen euch ein?

Interpretation 1

Man wählt die beiden Bruchstellen **gleichzeitig** und zufällig aus.

Interpretation 2

Man wählt die beiden Bruchstellen **nacheinander** und zufällig aus. Hierbei bricht man zunächst ein Stück zufällig ab, lässt es zu Boden fallen und bricht dann **vom dem noch in der Hand befindlichen Reststück** zufällig noch ein Stück ab.

Interpretation 3

Man wählt die beiden Bruchstellen **nacheinander** und zufällig aus. Hierbei bricht man zunächst ein Stück zufällig ab und dann **von einem der beiden entstehenden Stücke** noch ein Stück (die Auswahl des Teils, von dem man das zweite Stück abbricht, ist hierbei zufällig).

Interpretation 4

Man wählt die beiden Bruchstellen **nacheinander** und zufällig aus. Hierbei bricht man zunächst ein Stück zufällig ab und dann **von dem längeren der beiden Stücke** noch ein Stück.

Gruppenaufgabe:

Wie hoch schätzt du die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten ein? Gib einmal Tipps ab! Sind sie alle gleich hoch oder gibt es Unterschiede? Wann kann man überhaupt aus drei Stöcken ein Dreieck zusammenlegen? Hängt das vielleicht von dem Verhältnis der Längen der Seiten ab? Wie genau?

Aufgabe 1:

Versuche für alle vier Interpretationen mittels stochastischen Simulationen eine näherungsweise Wahrscheinlichkeit dafür zu ermitteln, dass man die drei Stücke zu einem Dreieck zusammensetzen kann. Stimmen die Ergebnisse mit deiner Vermutung überein?

Man kann genau dann ein Dreieck aus drei Stücken zusammenlegen, wenn jedes der drei Teile kürzer ist als die beiden anderen zusammen.

Es muss also immer die **Dreiecksungleichung** gelten:

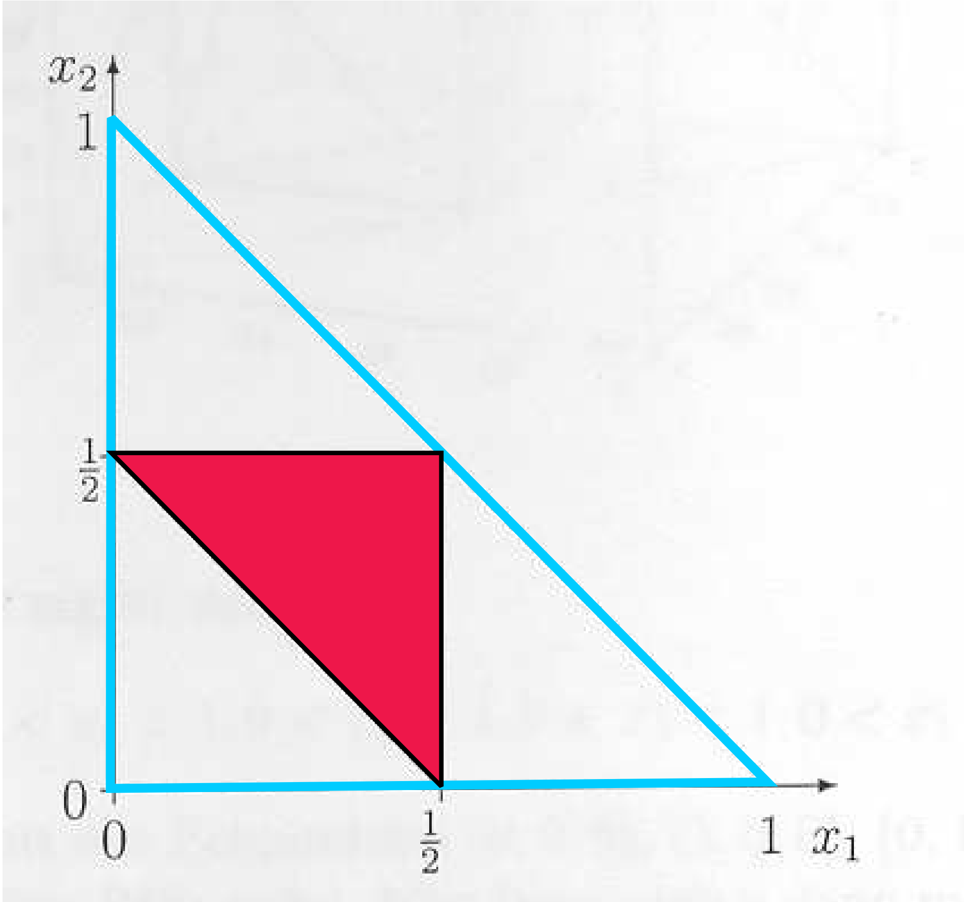
$$x < y + z$$

Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn alle drei Stücke kleiner als $\frac{1}{2}$ sind.

zur Interpretation 1

Es sei x_1 die Länge des ersten Stücks und x_2 die Länge des zweiten Stücks. Damit ist die Länge des dritten Stücks $1 - x_1 - x_2$. Gelten muss nun

- $x_1 < \frac{1}{2}$
- $x_2 < \frac{1}{2}$
- $x_1 + x_2 > \frac{1}{2}$



der günstige Bereich für das Zusammenlegen der Stöcke zu einem Dreieck

Bemerkung

Allgemein gilt (in dieser Interpretation): Die Wahrscheinlichkeit, dass man ein n-Eck legen kann, wenn man den Stock zufällig in n Teile zerlegt, beträgt:

$$p_n = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}.$$

zur Interpretation 2

Schwierige Rechnung (mit Integralen)!

$$
\begin{aligned}
p &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}-x_1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x_1}\, dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x_1}{1-x_1}\, dx_1 \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{1-x_1}{1-x_1}\, dx_1 + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x_1}\, dx_1 \\
&= -\frac{1}{2} + [-\ln(1-x_1)]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\approx 0.193.
\end{aligned}
$$

Bemerkung

Auch in dieser Interpretation interessiert uns natürlich die Wahrscheinlichkeit p_n des verallgemeinerten Problems, dass man ein n-Eck legen kann, wenn man den Stock zufällig in n Teile zerlegt. Dieses Problem wurde jedoch bis heute noch nicht analytisch gelöst. Man weiß nur, dass p_n mit n monoton steigt und dass für $n \geq 5$ folgendes gilt:

$$0.28 < p_n < 0.31$$

mit

$$p_n \approx 0.31 \qquad \text{für große } n.$$

zur Interpretation 3

Dieses Problem ist genau das gleiche wie bei der Interpretation 2!

zur Interpretation 4

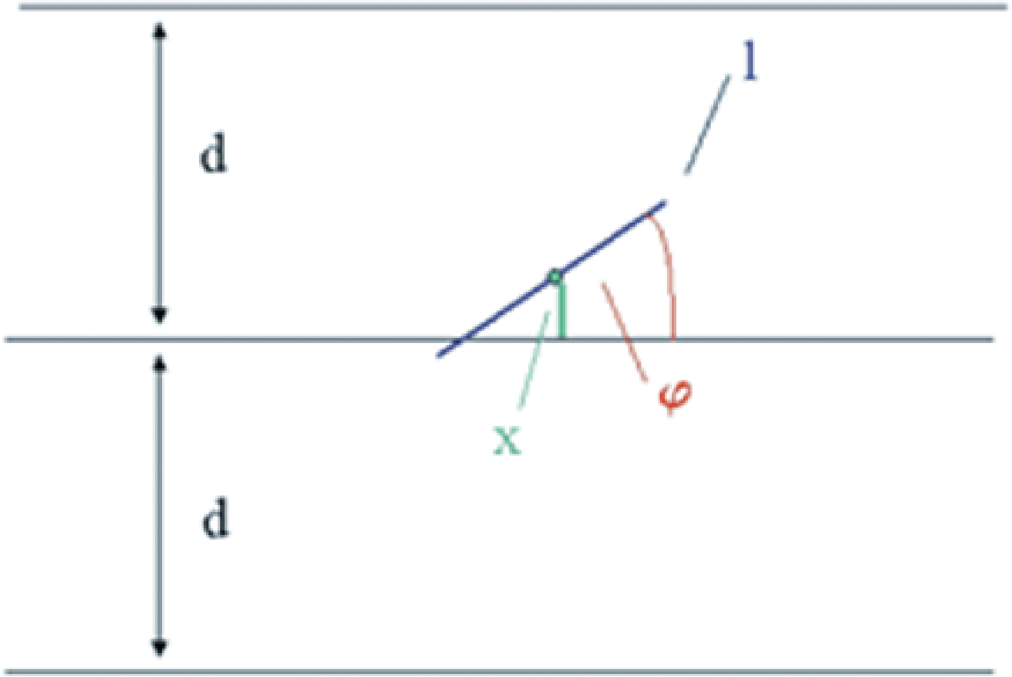
Wir „schmeißen“ die Hälfte der Fälle „raus“ und zwar nur solche, die **garantiert zu keinem Dreieck** führen!

$$\Rightarrow \quad p_{\text{Interpretation 4}} = 2 \cdot p_{\text{Interpretation 2}} = 0.386 \ .$$

Simulation 2: Das Buffon'sche Nadelproblem

Louis Leclerc de Buffon (1707-1788, französischer Naturforscher)

In der Ebene seien parallele Geraden gezogen, die den Abstand d haben. Auf diese Ebene werde zufällig eine Nadel der Länge l geworfen, wobei $l < d$ sei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schneidet die Nadel eine der eingezeichneten Geraden?

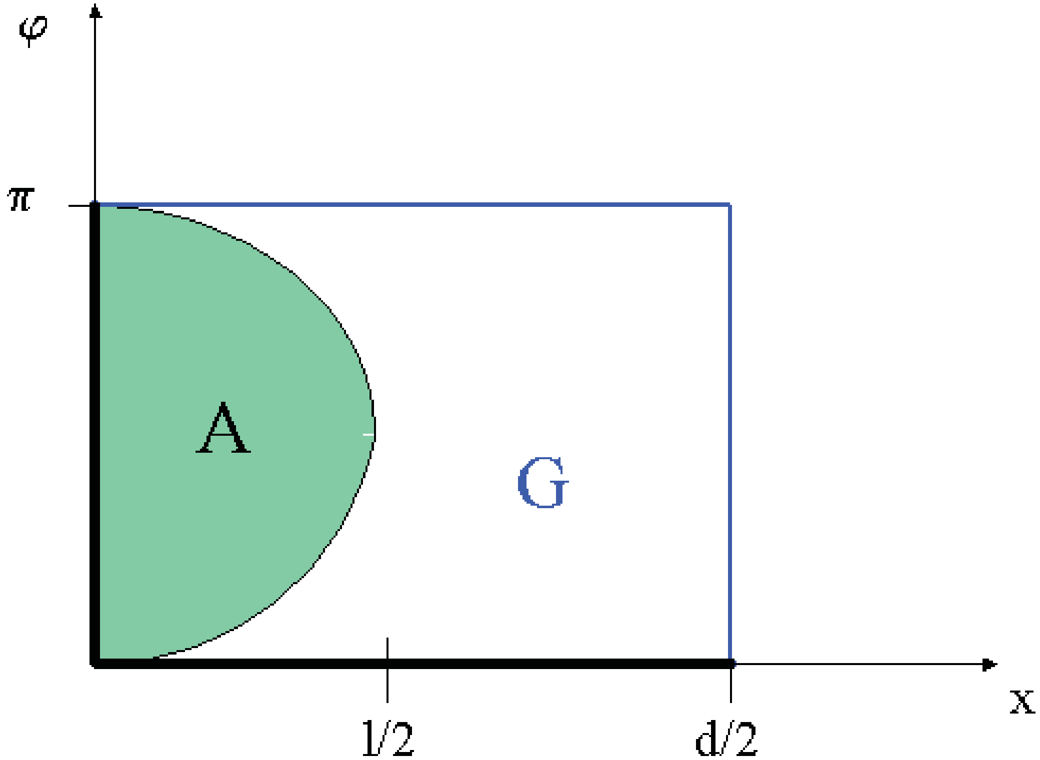


Lage der Nadeln zu den parallelen Geraden

$$0 \le x \le \frac{d}{2} \quad , \quad 0 \le \varphi < \pi$$

Bedingung: $\boldsymbol{x \le \frac{l}{2} \sin(\varphi)}$

Bedingung: $x \leq \frac{l}{2}\sin(\varphi)$



Der günstige Bereich für das Nadelexperiment von Buffon

Man berechnet:

$$|A| = \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin(\varphi)\, d\varphi = \frac{l}{2}(-\cos(\varphi))|_0^\pi = l$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{|A|}{|G|} = \frac{l}{\pi \cdot \frac{d}{2}} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Für die relative Häufigkeit gilt:

$$r_n(A) \approx \frac{2l}{\pi d}.$$

$$\Rightarrow \quad \pi \approx \frac{2l}{d r_n(A)}$$

Hier die daraus von einigen Experimentalforschern erzielten Näherungswerte für π:

- 3.1596 (Wolf, im Jahre 1850, 5000 Würfe)
- 3.1553 (Smith, im Jahre 1855, 3204 Würfe)
- 3.1419 (Fox, im Jahre 1894, 1120 Würfe)
- 3.1415929 (Lazzarini, im Jahre 1901 3408 Würfe)

Vergleich zweier Monte-Carlo-Simulationen

Wir vergleichen nun die beiden Monte-Carlo-Simulationen zur Schätzung der Kreiszahl π.

Als Maß für die Güte der Schätzung wählen wir die sogenannte **Stichprobenvarianz**.

Gegeben seien Werte $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Dann ist die **Stichprobenvarianz**

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2]$$

ein Maß für die Streuung der Messreihe.

Gruppenaufgabe:

Führe beide stochastischen Simulationsmethoden zur Näherung der Kreiszahl π jetzt 100 mal mit jeweils 50.000 Simulationsschritten durch. Dadurch erhältst du in beiden Fällen 100 Näherungswerte $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ für π. Berechne jeweils den Mittelwert und die Stichprobenvarianz und vergleiche die beiden Verfahren. Wie interpretierst du das Ergebnis?

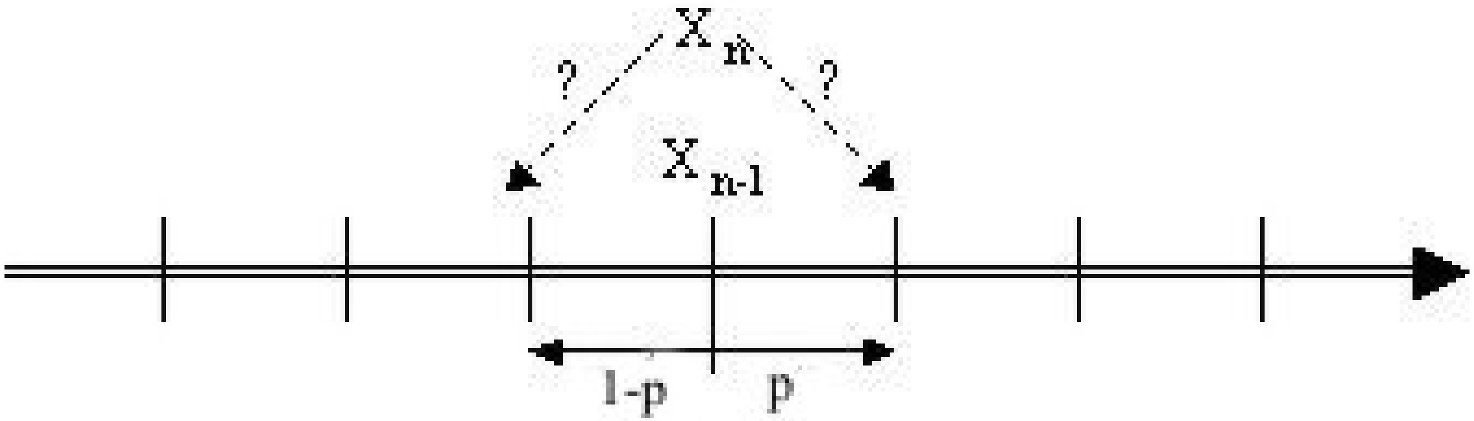
Irrfahrten (Random Walks)

Rekurrenz- und Transienzfragen

Mit X_n bezeichnen wir unsere Position zur Zeit n, für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Wir starten in x und es gelte:

$\boldsymbol{P(X_n = X_{n-1} + 1) = p}$ und $\boldsymbol{P(X_n = X_{n-1} - 1) = 1 - p.}$



$\boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$: **symmetrische Irrfahrt**.

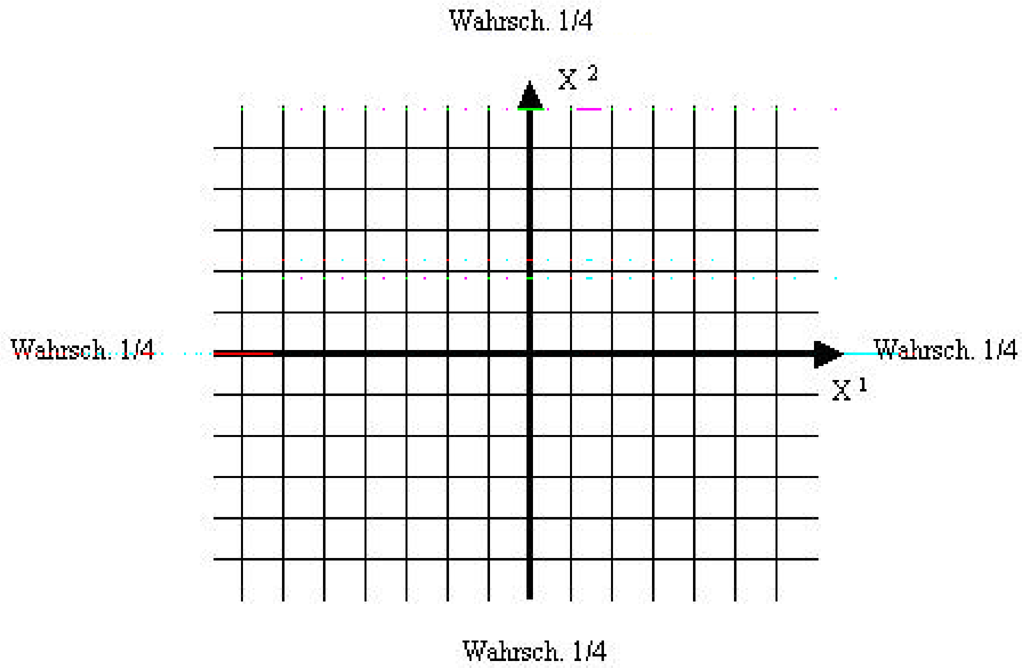
Zweidimensional:

$$X_n = \begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{pmatrix}$$

mit Startpunkt in $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und

$$\begin{aligned}
P\left(\begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{n-1}^1 \\ X_{n-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{4}, \\
P\left(\begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{n-1}^1 \\ X_{n-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{4}, \\
P\left(\begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{n-1}^1 \\ X_{n-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{4}, \\
P\left(\begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{n-1}^1 \\ X_{n-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Wir gehen also, ausgehend von einem Punkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, mit jeweils einer Wahrscheinlichkeit von 25% zu allen vier benachbarten Gitterpunkten:



Nun interessieren wir uns für die

Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir uns, beginnend in $x = 0$, im Raum verlaufen

oder (und damit zugleich präziser ausgedrückt) für die

Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, nämlich dass wir immer wieder (unendlich oft) zum Ausgangspunkt zurückkehren.

Wie groß ist also

$$\boldsymbol{P(X_n = 0 \text{ für unendlich viele } n)},$$

wenn wir in $X_0 = 0$ starten? Ändert sich das vielleicht mit zunehmender Dimension?

Gruppenaufgabe:

Was tippt ihr: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, im ein-, zwei- und dreidimensionalen Gitter unendlich oft zum Ausgangspunkt zurückzukehren?

Achtung: Wir können ein Experiment, dessen „Erfolg" von „Messungen" **an unendlichen vielen Zeitpunkten** abhängt, nicht durch endlich viele Durchläufe eines Algorithmus simulativ nachahmen!

Dies sind also die **Grenzen der Simulationstechnik**!

Rein mathematisch lässt sich das Problem aber lösen!

Können wir dennoch simulativ was machen?

Versuch einer Annäherung:

Berechne simulativ die Wahrscheinlichkeit, in 1.000.000.000 möglichen Zeitpunkten mindestens 10 mal zum Nullpunkt zurückzukehren.

Gruppenaufgabe:

Mache im fertigen Programm für die Dimensionen 1, 2 und 3 jeweils 10 Simulationsschritte des folgenden Experimentes:

Führe, beginnend im Nullpunkt, 1.000.000.000 Schritte der symmetrischen Irrfahrt durch und breche ab, sobald du 10 mal wieder am Nullpunkt angekommen bist. Bricht das Experiment vor dem 1.000.000.000ten Simulationsschritt ab, so nennen wir das Experiment „erfolgreich“ (wir haben uns nicht verlaufen und sind stattdessen „immer wieder“ (hier 10 mal) zum Ursprung zurückgekehrt). Berechne aus diesen 10 Simulationsschritten für alle drei Dimensionen die relative Häufigkeit des genannten Experiments. Gib nun Schätzungen für die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten in allen drei Dimensionen ab. (Im Dreidimensionalen dauert die Simulation eine halbe Ewigkeit. Breche sie ab, wenn dir zu langweilig wird. ;-))

Man nennt einen Zustand **rekurrent**, wenn man ihn mit Sicherheit (also mit Wahrscheinlichkeit 1) unendlich oft wieder erreicht, nachdem man bei ihm gestartet ist.

Andernfalls heißt er **transient**.

Im zweiten Fall ist die Wahrscheinlichkeit für das unendlich häufige Wiederkehren automatisch gleich 0!

Grund: das sogenannte **0-1-Gesetz**

Ein Zustand x ist genau dann rekurrent, wenn

$$\begin{array}{cl} & \boldsymbol{P}(\textbf{man erreicht } \boldsymbol{x} \textbf{ in genau } 1 \textbf{ Zeiteinheiten}) \\ + & \boldsymbol{P}(\textbf{man erreicht } \boldsymbol{x} \textbf{ in genau } 2 \textbf{ Zeiteinheiten}) \\ + & \boldsymbol{P}(\textbf{man erreicht } \boldsymbol{x} \textbf{ in genau } 3 \textbf{ Zeiteinheiten}) \\ + & \ldots \\ \vdots & \\ + & \ldots \\ = & \infty \end{array}$$

gilt, wenn also die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\textbf{man erreicht } x \textbf{ in genau } n \textbf{ Zeiteinheiten})$$

auch für große n „groß genug“ sind.

Man kann nun zeigen, dass diese Reihe im ein- und zweidimensionalen Fall divergiert (also gleich $+\infty$ ist) und im drei- und höherdimensionalen Fall konvergiert.

Also:

- **Dimension 1 und 2: Rekurrenz**

- **Dimension 3 und höher: Transienz**

Ruinwahrscheinlichkeiten

Wir versehen nun im eindimensionalen Fall die Irrfahrt mit sogenannten **Adsorptionspunkten** und interpretieren die Irrfahrt als Abfolge des immer wieder gleichen Glücksspiels gegen eine Spielbank mit:

$\mathbf{0}$: **Ruin**

$\boldsymbol{b}$: **Gewinnziel (man hört freiwillig auf)**

Weiter seien:

X_n: Kontostand zum Zeitpunkt n

$X_0 = x$: Startpunkt

p: **Gewinnwahrscheinlichkeit pro Einzelspiel**

Im Gewinnfall bekommt man 1 Euro ausbezahlt, im Verlustfall muss man 1 Euro an die Bank auszahlen.

Wir starten also wieder in $X_0 = x$ und es gelte:

$$\boldsymbol{P(X_n = X_{n-1} + 1) = p} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{P(X_n = X_{n-1} - 1) = 1 - p.}$$

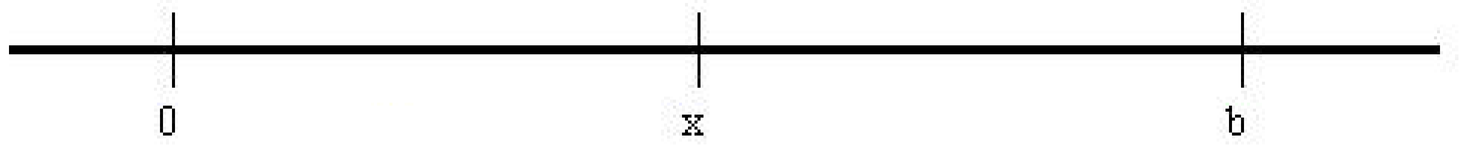
T_0: der Zeitpunkt des erstens Eintreffens in 0 (Ruin)

T_b: der Zeitpunkt des ersten Eintreffens in b (Gewinnziel)

Man nennt T_0 und T_b auch **Stoppzeiten**.

Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\boldsymbol{P(T_0 < T_b)}$$



Aufgabe 2:

Versuche im symmetrischen Fall (also dem Fall $p = \frac{1}{2}$) die Ruinwahrscheinlichkeit für verschiedene Startwerte $x > 0$ mit Gewinnziel $b = 100$ simulativ zu bestimmen. Hast du eine Vermutung für eine allgemeine Formel? Mache das Gleiche auch noch für verschiedene Einzelgewinnwahrscheinlichkeiten p (mit $p > \frac{1}{2}$ und $p < \frac{1}{2}$) und trage speziell für den Startwert $x = 50$ die simulativ bestimmten Ruinwahrscheinlichkeiten für verschiedene Einzelgewinnwahrscheinlichkeiten p in eine Tabelle ein.

Bemerkung: Im Falle $p \neq \frac{1}{2}$ wirst du es allerdings mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit nicht schaffen, eine explizite Formel für die Gewinnwahrscheinlichkeit zu finden.

$$\boldsymbol{p_x = P(T_0 < T_b | X_0 = x)}$$

Ruinwahrscheinlichkeit bei Start in x

Dann gilt für alle $x \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$

$$p_x = p \cdot p_{x+1} + (1-p) \cdot p_{x-1}$$

sowie:

$$p_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad p_b = 0.$$

Lösung für $p = \frac{1}{2}$:

$$p_x = P(T = T_0 | X_0 = x) = 1 - \frac{x}{b}$$

$\Rightarrow$ linear in x

Für $p \neq \frac{1}{2}$:

$$p_x = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^b - \left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^b - 1}$$

Mini-Kniffel

simulativer Vergleich von Spielstrategien

Punkteverteilung

1-er-Paar	:	1 Punkt
2-er-Paar	:	2 Punkte
3-er-Paar	:	3 Punkte
4-er-Paar	:	4 Punkte
Straße	:	5 Punkte
1-er-Dreierpasch	:	6 Punkte
2-er-Dreierpasch	:	7 Punkte
3-er-Dreierpasch	:	8 Punkte
4-er-Dreierpasch	:	9 Punkte .

1. Strategie (Priorität: hohe Zahlen)

Würfelt man beim ersten Wurf einen Dreierpasch, so hört man natürlich auf. Andernfalls lässt man (auch wenn man eine Straße gewürfelt hat) den/die Würfel mit der höchsten Augenzahl stehen und würfelt den/die anderen Würfel ein zweites Mal.

Beispiele:

$$(2,2,2) \;\longrightarrow\; \text{alles stehenlassen}$$

$$(2,3,4) \;\longrightarrow\; \text{4 stehenlassen; 2, 3 neu würfeln}$$

$$(1,3,3) \;\longrightarrow\; \text{3, 3 stehenlassen; 1 neu würfeln}$$

$$(1,1,3) \;\longrightarrow\; \text{3 stehenlassen; 1, 1 neu würfeln}$$

2. Strategie (Priorität: Straße)

Würfelt man beim ersten Wurf einen Dreierpasch, so hört man natürlich auf. Das Gleiche gilt für das Erreichen einer Straße. Bei allen anderen Konstellationen setzt man (auch wenn man im ersten Versuch ein Paar gewürfelt hat) bedingungslos auf eine Straße, wenn man diese durch das Werfen eines einzigen Würfels erreichen kann. Nur wenn eine Straße „sehr unwahrscheinlich“ ist, d.h. wenn man für das Erreichen zwei Würfel neu werfen müsste, setzt man auf einen Dreierpasch. Gibt es zwei Würfel mit unterschiedlicher Augenzahl, durch deren erneutes Werfen man eine Straße erzielen könnte, so wähle man den Würfel mit der niedrigeren Augenzahl.

Beispiele:

$(2,2,2) \longrightarrow$ alles stehenlassen

$(1,2,3) \longrightarrow$ alles stehenlassen

$(1,2,4) \longrightarrow$ 2, 4 stehenlassen; 1 neu würfeln

$(2,2,4) \longrightarrow$ 2, 4 stehenlassen; 2 neu würfeln

$(1,1,4) \longrightarrow$ 1, 1 stehenlassen; 4 neu würfeln

3. Strategie (Priorität: Dreierpasch)

Würfelt man beim ersten Wurf einen Dreierpasch, so hört man natürlich auf. In allen anderen Fällen lässt man, falls vorhanden, ein Paar stehen und würfelt den dritten Würfel neu. Hat man aber kein Paar im ersten Wurf erreicht, so lässt man (auch dann, wenn man im ersten Versuch eine Straße gewürfelt hat!) den Würfel mit der höchsten Augenzahl stehen und wirft die beiden anderen Würfel neu.

Beispiele:

$$(2,2,2) \quad \longrightarrow \quad \text{alles stehenlassen}$$

$$(1,2,4) \quad \longrightarrow \quad \text{4 stehenlassen; 1, 2 neu würfeln}$$

$$(1,2,3) \quad \longrightarrow \quad \text{3 stehenlassen; 1, 2 neu würfeln}$$

$$(2,2,4) \quad \longrightarrow \quad \text{2, 2 stehenlassen; 4 neu würfeln}$$

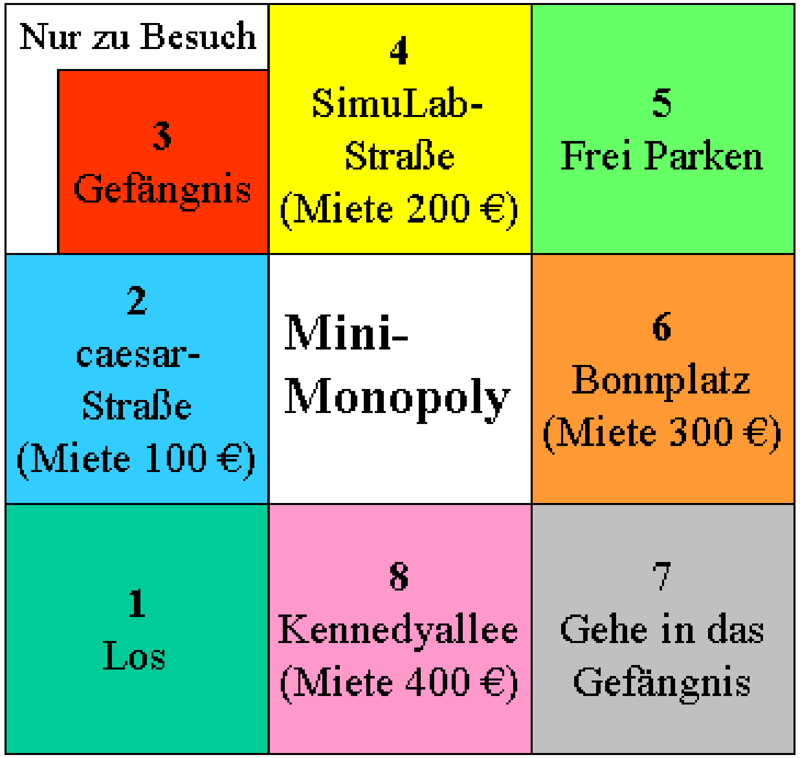
Gruppenaufgabe:

Vergleiche die drei Strategien mit Hilfe des fertigen Simulationsprogramms. Das Vorgehen ist dabei wie folgt: In jedem Simulationsschritt werden 10 Spielrunden durchgeführt. Der (alleinige) Sieger der 10 Spielrunden bekommt 1 Punkt auf ein gesondertes dauerhaftes Konto gutgeschrieben. Sollte es mehrere punktgleiche Sieger geben, so bekommt jeder Sieger 0.5 Punkte auf dieses dauerhafte Konto gutgeschrieben.

Wir führen nun 10.000 Simulationsschritte durch und schauen, welcher Spieler (d.h. welche Strategie) insgesamt die meisten Punkte erzielt hat, also den höchsten Stand auf dem dauerhaften Konto hat.

Mini–Monopoly

Wie hoch ist der langfristig erwartete Gewinn/Verlust?



Mini-Monopoly

Gruppenaufgabe:

Was tippst du: Wird man im Laufe des Spiels eher Geld gewinnen oder verlieren? Wie hoch erwartest du den Kontostand nach 100.000-maligem Würfeln?

Zur Erinnerung: Nimmt eine Zufallsvariable X die Werte $x_1, \ldots, x_m$ an, so gilt für ihren Erwartungswert:

$$\mathsf{E}[X] = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_m \cdot P(X = x_m).$$

X_n: der Kontostand nach n-maligem Würfeln

Ohne Beachtung der möglichen Strafzahlung im Gefängnis beim Würfeln einer 6:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[X_1] &= 1900 \cdot \frac{1}{6} + 2000 \cdot \frac{1}{6} + 1800 \cdot \frac{1}{6} + 2000 \cdot \frac{1}{6} + 1700 \cdot \frac{1}{6} + 2000 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 1900, \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ erwarteter Verlust von 100 Euro nach dem ersten Wurf

Gruppenaufgabe:

Berechne nun den Erwartungswert von $X_{100.000}$.

Nein, war ein Scherz!

Gruppenaufgabe:

Bestimme mit Hilfe des Simulationsprogramms den Erwartungswert von $X_{100.000}$ näherungsweise. Führe hierzu 1000 Simulationsschritte durch. Entspricht das Ergebnis deinen Erwartungen? Ist es wenigstens im Nachhinein plausibel?

Ein Lotterie-Problem

Ziehen ohne Zurücklegen
(hypergeometrische Verteilungen)

Zur Erinnerung: Galton-Brett

Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel im $(k+1)$-ten Feld von links ankommt:

$P(„(12-k)$ mal nach links, k mal nach rechts“$) = \binom{12}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{12-k}$.

Hierbei war

$$\binom{12}{k} = \frac{12!}{k! \cdot (12-k)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (12-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

„Ziehen mit Zurücklegen“-Experiment

Nun: **„Ziehen ohne Zurücklegen“**

Bei einer Lotterie werden 100 Lose angeboten. Als ersten Preis gibt es einen Urlaub, als zweiten ein Herrenfahrrad, als dritten ein Damenfahrrad sowie als Trostpreise 20 Flaschen Most, 10 Gläser Honig, 30 Äpfel und 25 Nüsse. Jemand kauft 3 Lose (als erster). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

(a) ... alle 3 Haupttreffer zu gewinnen?
(b) ... keinen Haupttreffer zu gewinnen?
(c) ... mindestens einen Haupttreffer zu gewinnen?
(d) ... das Herrenfahrrad zu gewinnen?
(e) ... nichts zu gewinnen?
(f) ... 3 Trostpreise zu gewinnen?
(g) ... 1 Most, 1 Honig und 1 Apfel zu gewinnen?
(h) ... 3 Äpfel oder 3 Nüsse zu gewinnen?
(i) ... nur den Urlaub zu gewinnen ?

Aufgabe 3:

Schreibe ein Simulationsprogramm, mit dem du die gesuchten Wahrscheinlichkeiten näherungsweise bestimmst (etwa mit 10.000 Simulationsschritten). Ordne der Zahl 1 den Urlaub zu, der Zahl 2 das Herrenfahrrad, der Zahl 3 das Damenfahrrad, etc. Erzeuge dann pro Simulationsschritt drei Zufallszahlen zwischen 1 und 100. Zur Vermeidung von Doppelziehungen füge ein:

```
zufallszahl1 = Int(Rnd() * 100) + 1
zufallszahl2 = zufallszahl1
Do While (zufallszahl2 = zufallszahl1)
zufallszahl2 = Int(Rnd() * 100) + 1
Loop
⋮    ,
```

aber vielleicht fallen dir ja auch andere (bessere) Möglichkeiten ein.

Wir wissen bereits:

Aus n verschiedenen Elementen kann man ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen k Stück auf

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

verschiedene Weisen auswählen, wobei $1 \leq k \leq n$ vorausgesetzt ist und $0! := 1$ gesetzt wird.

Eine Urne enthalte N Kugeln, darunter M schwarze und $N-M$ weiße. Es werden ohne Zurücklegen n Kugeln mit einem Griff (oder: ohne Beachtung der Reihenfolge) gezogen, mit $1 \leq n \leq N$. Die Wahrscheinlichkeit, dass darunter genau k schwarze und $n-k$ weiße Kugeln sind, beträgt:

$$p_k = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Bei einer Lotterie werden 100 Lose angeboten. Als ersten Preis gibt es einen Urlaub, als zweiten ein Herrenfahrrad, als dritten ein Damenfahrrad sowie als Trostpreise 20 Flaschen Most, 10 Gläser Honig, 30 Äpfel und 25 Nüsse. Jemand kauft 3 Lose (als erster). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

(a) ... alle 3 Haupttreffer zu gewinnen?

zu (a): Aus den 3 Haupttreffern sind 3 Elemente und aus den übrigen 97 Nicht-Haupttreffern 0 Elemente zu ziehen. Daher gilt:

$$p_a = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{97}{0}}{\binom{100}{3}} = \frac{1}{161700} \approx 6.184 \cdot 10^{-6}.$$

Bei einer Lotterie werden 100 Lose angeboten. Als ersten Preis gibt es einen Urlaub, als zweiten ein Herrenfahrrad, als dritten ein Damenfahrrad sowie als Trostpreise 20 Flaschen Most, 10 Gläser Honig, 30 Äpfel und 25 Nüsse. Jemand kauft 3 Lose (als erster). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

(b) ... keinen Haupttreffer zu gewinnen?

zu (b): Aus den 97 Nicht-Haupttreffern sind 3 Elemente und aus den 3 Haupttreffern 0 Elemente zu ziehen. Daher gilt:

$$p_b = \frac{\binom{97}{3} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{100}{3}} \approx 0.9118.$$

Bei einer Lotterie werden 100 Lose angeboten. Als ersten Preis gibt es einen Urlaub, als zweiten ein Herrenfahrrad, als dritten ein Damenfahrrad sowie als Trostpreise 20 Flaschen Most, 10 Gläser Honig, 30 Äpfel und 25 Nüsse. Jemand kauft 3 Lose (als erster). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

(c) ... mindestens einen Haupttreffer zu gewinnen?

zu (c): Offenbar ist dieses Ereignis das Gegenereignis des Ereignisses von Aufgabenteil (b). Daher gilt:

$$p_c = 1 - p_b \approx 0.0882.$$

Bei einer Lotterie werden 100 Lose angeboten. Als ersten Preis gibt es einen Urlaub, als zweiten ein Herrenfahrrad, als dritten ein Damenfahrrad sowie als Trostpreise 20 Flaschen Most, 10 Gläser Honig, 30 Äpfel und 25 Nüsse. Jemand kauft 3 Lose (als erster). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

(d) ... das Herrenfahrrad zu gewinnen?

zu (d): Aus dem 1 Herrenfahrrad ist 1 Element und aus den 99 Nicht-Herrenfahrrädern sind 2 Elemente zu ziehen. Daher gilt:

$$p_d = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{99}{2}}{\binom{100}{3}} = 0.03.$$

Gruppenaufgabe:

Wir versuchen nun die übrigen Aufgaben (e)-(i) zusammen zu lösen. Ihr könnt ja zur Kontrolle unsere Ergebnisse mit den Näherungswerten aus euren Simulationen vergleichen.

Bei einer Lotterie werden 100 Lose angeboten. Als ersten Preis gibt es einen Urlaub, als zweiten ein Herrenfahrrad, als dritten ein Damenfahrrad sowie als Trostpreise 20 Flaschen Most, 10 Gläser Honig, 30 Äpfel und 25 Nüsse. Jemand kauft 3 Lose (als erster). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit . . .

(e) . . . nichts zu gewinnen?

Bei einer Lotterie werden 100 Lose angeboten. Als ersten Preis gibt es einen Urlaub, als zweiten ein Herrenfahrrad, als dritten ein Damenfahrrad sowie als Trostpreise 20 Flaschen Most, 10 Gläser Honig, 30 Äpfel und 25 Nüsse. Jemand kauft 3 Lose (als erster). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit . . .

(f) . . . 3 Trostpreise zu gewinnen?

Bei einer Lotterie werden 100 Lose angeboten. Als ersten Preis gibt es einen Urlaub, als zweiten ein Herrenfahrrad, als dritten ein Damenfahrrad sowie als Trostpreise 20 Flaschen Most, 10 Gläser Honig, 30 Äpfel und 25 Nüsse. Jemand kauft 3 Lose (als erster). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

(g) ... 1 Most, 1 Honig und 1 Apfel zu gewinnen?

Bei einer Lotterie werden 100 Lose angeboten. Als ersten Preis gibt es einen Urlaub, als zweiten ein Herrenfahrrad, als dritten ein Damenfahrrad sowie als Trostpreise 20 Flaschen Most, 10 Gläser Honig, 30 Äpfel und 25 Nüsse. Jemand kauft 3 Lose (als erster). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

(h) ... 3 Äpfel oder 3 Nüsse zu gewinnen?

Bei einer Lotterie werden 100 Lose angeboten. Als ersten Preis gibt es einen Urlaub, als zweiten ein Herrenfahrrad, als dritten ein Damenfahrrad sowie als Trostpreise 20 Flaschen Most, 10 Gläser Honig, 30 Äpfel und 25 Nüsse. Jemand kauft 3 Lose (als erster). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

(i) ... nur den Urlaub zu gewinnen?