Schüler-SimuLab
Kursreihe stochastische Simulationen
Kurs 5

Einführung in die stochastische Finanzmathematik:

stochastische Simulationen von Aktien und die Optionsbewertung nach Black-Scholes

Stefan Hartmann

Forschungszentrum caesar

1. Februar 2008

Ein paar einleitende Worte

Mit dem vorliegenden Kurs habe ich mich zu dem sehr ambitionierten Schritt entschlossen, euch, die ihr mit der Technik der stochastischen Simulation durch die vorausgegangenen Kurse mittlerweile ja vertraut seid, in das moderne und forschungsnahe Gebiet der stochastischen Finanzmathematik einzuführen. In kaum einem anderen mathematischen Gebiet kann man so schnell und zugleich so nah an aktuelle wissenschaftliche Fragestellungen und praxisnahe Anwendungen in der Wirtschaft herankommen wie im Bereich der stochastischen Simulation und hier insbesondere im Bereich der stochastischen Finanzmathematik; diese Chance möchte ich ergreifen.

Nach ein paar grundlegenden Bemerkungen zu Aktien, zur Börse und zu Optionen wird zunächst das Binomialmodell (dessen Baumstruktur euch aus anderen Kursen bereits vertraut ist) ausführlich diskutiert und von euch selber in einfacher Form am Computer implementiert. Mit diesem Modell kann man sehr einfach Preise für sogenannte europäische und amerikanische Optionen bestimmen.

Um dessen stetiges Analogon, das Black-Scholes-Modell, inklusive einer stochastischen Simulation der Aktienkurse und der Optionswerte besprechen zu können, wird zunächst die Normalverteilung als Grenzverteilung der euch bereits bekannten Binomialverteilung eingeführt. Nachdem ihr gelernt habt, wie man normalverteilte Zufallszahlen effektiv erzeugt, könnt ihr dann selber Aktienkurse stochastisch simulieren und damit dann auch simulativ faire Optionspreise bestimmen.

Abschließend lernt ihr die berühmte Formel von Black und Scholes zur Optionspreisbestimmung kennen. Ihr könnt damit experimentell überprüfen, welche Marktfaktoren welchen Einfluss auf den Optionspreis haben.

Danken möchte ich an dieser Stelle ganz herzlich Ilona Faßbender und Tobias Sodoge für Ihre Hilfe bei der Programmierung. Ilona hatte im Rahmen eines

freiwilligen Schülerpraktikums unter meiner Anleitung einige Programme geschrieben, die Tobias im Rahmen seiner Facharbeit überarbeitet und durch eigene Programme ergänzt hat.

Ich hoffe, dass euch der Kurs Spaß macht und ihr einen guten Eindruck in dieses moderne, angewandte mathematische Gebiet erhaltet. Vielleicht schaut ihr euch ja die Börsennachrichten in Zukunft mit einem etwas anderen Auge an und überlegt sogar in diesem Bereich vielleicht einmal als Mathematikerin oder Mathematiker zu arbeiten oder gar zu forschen.

Bonn, den 12.04.2006 Stefan Hartmann

Kapitel 1

Allgemeines zu Aktien und zur Börse

Dieses Kapitel basiert weitesgehend auf dem ausgezeichneten Skript „Die Börse - einfach erklärt“, das zur WDR-Sendereihe „Quarks & Co“ erschienen ist. Ich habe es etwas anders strukturiert, wesentlich gekürzt und einige eigene Ideen einfließen lassen.

Die grundsätzliche Idee beim Erwerb einer Aktie eines Unternehmens ist die **Unternehmensbeteiligung**. Bei einer Aktiengesellschaft wird sozusagen das Unternehmen in viele kleine Bestandteile zerlegt, und diese werden an diverse Anleger verkauft.

Welche Vorteile hat nun ein Unternehmen davon, eine Aktiengesellschaft zu werden und sich somit derart selber zu „zerstückeln“?

- Das Unternehmen kann auf diese Weise schnell zu viel Geld kommen, das dann wieder investiert werden kann.
- Das Unternehmensrisiko wird auf viele Schultern verteilt.
- Durch den Handel mit Aktien kann man zum Beispiel Fusionen mit anderen Aktiengesellschaften oder Übernahmen sehr schnell und relativ problemlos bewerkstelligen.
- Oft halten die Firmengründer einen Großteil der Aktien selbst und können dann Unternehmenserfolge durch den Verkauf der im Wert gestiegenen Aktien in bares Geld ummünzen.

Da ein Aktionär durch den Erwerb einer Aktie eines Unternehmens Miteigentümer des Unternehmens ist, hat er natürlich auch Mitbestimmungsrechte und wird an den Gewinnen des Unternehmens beteiligt. Einmal im Jahr findet eine Versammlung aller Aktionäre statt, die sogenannte **Jahreshauptversammlung**. In der Praxis allerdings machen die meisten Kleinaktionäre von diesem Recht nicht persönlich Gebrauch, sondern lassen sich von ihrer Bank vertreten. Die Gewinnbeteiligung erfolgt über sogenannte **Dividendenzahlungen**. Die Dividende variiert sehr stark von Aktie zu Aktie, und keine Aktiengesellschaft ist verpflichtet, überhaupt Dividenden auszuschütten. Auf der Jahreshauptversammlung wird über die Höhe der Dividende entschieden, diese kann aber auch schon mal (trotz erwirtschafteten Überschusses) ausfallen, wenn der Überschuss komplett in das Unternehmen in Form von Neuinvestitionen zurückfließt. Die Dividende hat in der Regel eine Höhe von unter einem Euro pro Aktie. Daher sind heutzutage, auch für Privatanleger, die Dividendenzahlungen nicht der Hauptgrund für die Anlage in Aktien, sondern stattdessen die Hoffnung auf langfristige Anlage- und kurzfristige Spekulationsgewinne, also die Hoffnung, Aktien eines Tages zu einem höheren Wert zu verkaufen als zu dem Wert, für den man sie erworben hat, und so den Kursgewinn zu „realisieren“. Doch wie erwirbt man überhaupt Aktien?

Die meisten (aber längst nicht alle) Aktien werden an (realen oder virtuellen) Börsen gehandelt. (Manche Aktien werden einfach vererbt oder, im Falle kleiner Aktiengesellschaften, direkt potentiellen Anlegern angeboten.) Der Großteil der Aktien wird aber regulär an Börsen gehandelt. Der Vorteil einer Börse liegt darin, dass hier an einem Ort alle potentiellen Käufer und Verkäufer zusammenkommen, dadurch leicht Handelspartner finden und es dabei nach den Prinzipien von Angebot und Nachfrage zu marktgerechten und einheitlichen Preisen kommt. Wie das genau geschieht, wird weiter unten im Detail beschrieben. Unter einer Börse kann man sich also eine Art „Marktplatz für Aktien“ vorstellen. Früher ausschließlich in richtigen, heute auch häufig in virtuellen Sälen verkaufen Händler ihre Waren, die in diesem Fall eben Aktien sind. 1409 wurde die erste Börse in Europa, in Brügge (Belgien), gegründet, dort wurden aber noch keine Aktien gehandelt, sondern andere Handelsgeschäfte getätigt. Auf diesem Platz in Brügge kam die Börse auch zu ihrem Namen, denn der Platz, auf dem sie stand, hieß „ter buerse“. Die erste Aktie der Welt gab 1606 die niederländische Vereinigte Ostindische Kompanie aus.

eine sehr alte Aktie von BMW

Die erste Börse, die unserem heutigen Bild einer Börse nahekommt, befand sich in Amsterdam. Heutzutage gibt es weltweit zahlreiche Börsen, in fast allen industrialisierten Staaten. Die größte deutsche (Präsenz-)Börse befindet sich in Frankfurt, daneben gibt es aber auch zahlreiche deutsche Regionalbörsen. Die größte Börse weltweit ist natürlich der „New York Stock Exchange“ an der berühmten Wall Street. Doch auch wenn man Aktien besitzt, hat man zumeist eine Börse selber noch nie besucht.

ein Blick auf die Frankfurter Börse

Aktien kann man nämlich nicht direkt an der Börse kaufen. Nur ausgewiesene **Börsenmakler** sind dort zugelassen und unterliegen starken Kontrollen durch das Bundesaufsichtsamt für das Wertpapierwesen und die jeweiligen Börsenaufsichten. Auf diese Weise sollen Missbrauchsfälle, etwa durch Insiderwissen erworbene Spekulationsgewinne, verhindert werden. Man selber beauftragt als Kleinanleger diese Börsenmakler selten direkt, sondern spricht stattdessen mit der Bank seines Vertrauens oder einem anderen Anlageberater einen Auftrag (eine sogenannte **Order**), eine Art Handelsstrategie, ab (Welche Aktien kauft/verkauft man spätestens/frühestens zu höchstens/mindestens welchem Preis?). Die Bank leitet diese Order dann an ihren Makler vor Ort weiter. Der Makler muss nun versuchen die Order zu erfüllen, also beispielsweise, wenn man eine Aktie zu einem gewissen Mindestbetrag verkaufen möchte, jemanden finden, der mindestens soviel für die Aktie bietet. Dies macht er allerdings nicht auf direktem Wege, sondern zentral über den sogenannten **amtlichen Makler**. Das genaue Verfahren wird, wie gesagt, weiter unten beschrieben. Heutzutage bewegen sich die Börsenmakler allerdings nur noch selten auf den berühmten Parkettböden der Börsen, da die meisten Aktiengeschäfte im Internet über Computerhandelssysteme (zum Beispiel Xetra) abgewickelt werden. Aktien werden in der Regel auch gar nicht mehr als Papier ausgegeben, ja noch nicht einmal gedruckt, es sei denn zu Werbezwecken. Manchmal werden sie auch zu Propagandazwecken missbraucht ;-):

„Aktie“ der Anti-Atomkraftbewegung

Aber ansonsten werden sie nur noch mit ihrem Nennwert hin- und hergebucht.

Bei jedem Kauf oder Verkauf einer Aktie fallen Gebühren an, sogenannte **Transaktionskosten**. Sie setzen sich vorwiegend aus Provisionen an die beauftragten Banken und deren Börsenmakler sowie Depotgebühren[1] zusammen. Diese Kosten muss man bei einer Gewinn- und Verlustrechnung natürlich immer berücksichtigen.

Kauft man zum Beispiel eine Aktie für 100 Euro und muss 5 Prozent Transaktionskosten bezahlen, so lohnt sich der Verkauf erst, wenn der Aktienkurs einen Wert von 105 Euro überschritten hat. Obwohl solche Transaktionskosten bei Gewinn- und Verlustrechnungen also eine wichtige Rolle spielen, sollen sie in allen weiteren Überlegungen und Modellierungen des Kurses, wie allgemein in der stochastischen Finanzmathematik üblich, aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigt werden. Für praktische Überlegungen müsste man sie dann eben jeweils dazurechnen.

Aktien galten übrigens auch aus steuerlichen Gründen lange Zeit besonders als längerfristig reizvolle Geldanlage: Hielt man eine Aktie mindestens zwölf Monate lang, so musste man eventuelle Kursgewinne anschließend nicht versteuern! Realisierte man allerdings seine Gewinne vorher, so muss man eine Steuer auf diese Spekulationsgewinne errichten. Mittlerweile ist diese Regelung aufgehoben, man muss grundsätzlich Steuern auf Gewinne zahlen. Hier wird die Gesetzeslage aber ständig neu angepasst.

Um einen Überblick über die „Stimmung“ an der Börse zu erhalten, schaut man sich den sogenannten **Index** an. In Deutschland ist dies der **DAX (Deutsche Aktienindex)**, der nach einem Schlüssel aus den Aktienkursen der 30 wichtigsten deutschen Aktiengesellschaften, an die das meiste Kapital gebunden ist, ermittelt wird. Die Unternehmen, die im DAX vertreten sind, ändern sich von Zeit zu Zeit. Den DAX gibt es erst seit 1988; er wurde von der „Börsen-Zeitung“, der Arbeitsgemeinschaft der Deutschen Wertpapierbörsen und der Frankfurter Börse in Zusammenarbeit „erfunden“.

[1] Die Führung eines Depots ist für den Handel mit Aktien notwendig. Ein Depot kann dabei als eine Art „Konto für Aktien“ angesehen werden. Einige Direktbanken verlangen heutzutage keine Depotgebühren mehr.

Verlauf des DAX von Anfang 2004 bis Anfang 2006 mit Trends und 80-Tage-Linie

Nun wollen wir uns wieder den einzelnen Aktien selbst zuwenden.

Wie kommen eigentlich Aktienkurse zustande? Warum etwa steigt die Bayer-Aktie manchmal erst zwei Tage lang und fällt dann wieder urplötzlich zurück? So schnell können sich die Geschäftszahlen von Bayer doch nicht geändert haben? Woher kommen eigentlich diese starken Schwankungen?

Nun, die Kurse der Aktien haben halt nicht nur etwas mit dem Unternehmen zu tun, von dem sie ausgegeben wurden. Die Aktien von Bayer bilden einen eigenen Markt, und die Preise auf diesem Markt richten sich zunächst nach dem Prinzip von Angebot und Nachfrage auf diesem Markt. Alle potentiellen Verkäufer und Käufer von Bayer-Aktien müssen sich sozusagen „an einem riesengroßen runden Tisch unter Aufsicht“ gemeinsam auf einen Preis einigen, mit dem die meisten leben können. Theoretisch könnten die Preise natürlich auch klassisch im direkten Austausch einzelner Käufer und Verkäufer verhandelt werden (das wäre dann ebenfalls ein Prinzip von Angebot und Nachfrage, allerdings in einem anderen, individuelleren Rahmen), nur wäre dann erstens das Aktiengeschäft sehr zäh und unübersichtlich, und zweitens würden die individuell erzielten Preisvereinbarungen nicht zwangsläufig die aktuelle Marktlage widerspiegeln. Um ein solches Preischaos zu verhindern und stattdessen einen schnellen und aktiven Handel zu ermöglichen, fasst der **amtliche Makler** einer Börse alle Angebote eines Handelstages zusammen und wertet sie aus.

Alle Börsenmakler, die gerade an der Börse im Auftrag ihrer Kunden handeln, geben also ihre Verkaufs- und Kaufangebote beim amtlichen Makler ab. Hierbei geben die Käufer einen Höchstpreis an, zu dem sie die Aktie gerade noch so kaufen wollen und die Verkäufer entsprechend einen Mindestpreis, zu dem sie die Aktie gerade noch so verkaufen wollen. Wer kein Limit setzt und stattdessen „bestens“ verkauft, akzeptiert jeden Preis, das gleiche gilt auf der Kaufseite für „billigst“.

Nun müssen diese Angebote für jede einzelne Aktie erfasst und ausgewertet werden. Aus diesen Daten errechnet der Makler für jede Aktie den aktuellen Kurs, mit Hilfe des sogenannten **Skontros**, eines speziellen Orderbuches, und zwar nach dem folgenden Prinzip:

Der Kurs muss so bestimmt werden, dass möglichst viele Umsätze möglich sind. So viele Käufer und Verkäufer wie möglich sollen zu ihren Kursen kaufen oder verkaufen können.

Beispiel

Nehmen wir mal an, dass 600 Börsenmakler eine bestimmte Aktie kaufen und ebenfalls 600 Börsenmakler eine bestimmte Aktie verkaufen wollen. Von den Käufern nennen 100 Käufer den Preis 28,50 Euro als Höchstpreis, 200 Käufer 29,00 Euro und 100 Käufer 29,50 Euro. Der Rest der Käufer kauft „billigst“. Von den Verkäufern nennen 100 Verkäufer den Preis 29,50 Euro als Mindestpreis, 200 Verkäufer 29,00 Euro und 200 Verkäufer 28,50 Euro. Der Rest der Verkäufer verkauft „bestens“. Dann sieht das Skontro des amtlichen Maklers wie folgt aus:

Preis	**Kauf**	**Verkauf**
bestens		100
28,50	100	200
29,00	200	200
29,50	100	100
billigst	200	

In diesem Beispiel wird der Kurs auf 29,00 Euro festgelegt, denn zu diesem Kurs ist der Umsatz am höchsten: es können immerhin 500 Aktien ihren Besitzer wechseln! Die anderen (jeweils 100) Käufer und Verkäufer müssen sich nun entscheiden, ob sie zu diesem Kurs trotzdem kaufen oder verkaufen wollen oder ob sie lieber auf einen für sie günstigeren Kurs warten möchten. Es kann auch passieren, dass eine Aktie gar nicht gehandelt wird, wenn die Vorstellungen der Käufer und Verkäufer weit auseinander liegen. In diesem Fall kommt es anschließend häufig zu großen Preisschwankungen.

Aufgabe 1:

Fünf Käufer möchten eine bestimmte Aktie erwerben. Käufer A will 4 Aktien zu 43 Euro je Stück erwerben, Käufer B würde für 4 Aktien 45 Euro pro Aktie zahlen, und Käufer C möchte 2 Papiere für je 47 Euro kaufen. 44 Euro für eine Aktie würde Käufer D ausgeben, und Käufer E hätte gerne 3 Anteile für je 46 Euro. Zugleich bieten ebenfalls fünf Verkäufer Aktien mit unterschiedlichen Preisvorstellungen an. Verkäufer V möchte 3 Aktien für je 46 Euro verkaufen, Verkäufer W bietet 1 Aktie für 44 Euro an. Verkäufer X will für seine 4 Aktien je 45 Euro pro Stück haben. Stolze 47 Euro möchte Verkäufer Y je Aktie haben. Er bietet 2 Aktien an. Am günstigsten ist Händler Z. Er verkauft 4 Aktien für je 43 Euro.

Welchen Kurs musst du als amtlicher Makler festlegen? Lege dir ein Skontro an und ermittle den Wert damit.

Kapitel 2

Optionen

In diesem Kapitel richte ich mich weitesgehend nach dem Buch „Optionen und Futures verstehen“ von Igor Uszczapowski.

Eine **Option** (auf eine Aktie) beinhaltet das Recht (aber nicht die Pflicht) zum Kauf oder Verkauf einer Aktie, wobei mögliche Kauf-/Verkaufszeitpunkt(e) und Kauf-/Verkaufspreis(e) vorher festgelegt werden.

Entsprechend gibt es auch Optionen auf andere **Basiswerte**, etwa auf Aktienindices (wie den DAX), Währungen, usw. Wir wollen hier aber nur Optionen auf Aktien betrachten. Da die Optionen vom jeweiligen Basiswert abgeleitet sind, heißen sie auch **Derivate**[1].

Der **Inhaber** oder **Käufer** einer Option erwirbt dieses Recht vom **Stillhaber** oder **Verkäufer**. Macht der Inhaber der Option von dem Recht Gebrauch, so sagt man, der Inhaber habe die Option **ausgeübt**.

Wichtig ist: Eine Option kann, muss aber nicht ausgeübt werden. Wird sie jedoch ausgeübt, so ist der Stillhalter dazu verpflichtet, dem Wunsch des Inhabers Folge zu leisten. Bei Ausübung der Option erlischt dann die Option, bei Nichtausübung bis zum Fälligkeitszeitpunkt verfällt sie. Wir befinden uns vereinbarungsgemäß bei unseren Betrachtungen immer im Zeitpunkt $t = 0$ („heute“), so dass die Laufzeit T der Option zugleich ihr Fälligkeitszeitpunkt ist.

Es gibt eine Vielzahl verschiedener Optionen, die zum Teil äußerst kompli-

[1] von lat. „derivare“=„ableiten“

ziert und mathematisch kaum in den Griff zu kriegen sind. Wir konzentrieren uns in diesem Kurs auf die **Standard-Optionen** (auch: **plain-vanilla Optionen**).

Optionen, die jederzeit während ihrer Laufzeit ausgeübt werden können, nennt man **amerikanische Optionen**. Optionen, die nur am Ende ihrer Laufzeit ausgeübt werden können, heißen **europäische Optionen**. Die geographischen Bezeichnungen haben ihre eigentliche Bedeutung verloren, da heutzutage beide Arten von Optionen sowohl in Amerika wie auch in Europa gehandelt werden.

Unterscheidet man Optionen nach dem in ihnen enthaltenen Recht, so sind zwei grundlegende Typen von Optionen zu nennen:

Calls (Kaufoptionen) und **Puts** (Verkaufsoptionen).

Wir können also zusammenfassend festhalten:

Call (Kaufoption):

Ein **Call** beinhaltet das Recht (aber nicht die Pflicht),

- einen zugrundeliegenden Gegenstand oder **Basiswert**, bei uns hier stets eine **Aktie**,
- zu einem im voraus bestimmten fixen Preis, dem **Ausübungspreis**,
- während (amerikanische Option) oder nur am Ende der **Laufzeit** (europäische Option)

zu **kaufen**.

Put (Verkaufsoption):

Ein **Put** beinhaltet das Recht (aber nicht die Pflicht),

- einen zugrundeliegenden Gegenstand oder **Basiswert**, bei uns hier stets eine **Aktie**,
- zu einem im voraus bestimmten fixen Preis, dem **Ausübungspreis**,

- während (amerikanische Option) oder nur am Ende der **Laufzeit** (europäische Option)

zu **verkaufen**.

Noch eine Terminologie: Wer eine Option kauft, der hat eine **Long-Position** oder, wie man auch sagt: **Er ist die Option long**. Wer eine Option verkauft, der hat eine **Short-Position** oder, wie man auch sagt: **Er ist die Option short**.

Wir haben also die folgenden vier Grundgeschäftsarten:

- den **Long-Call**, d.h. den Kauf einer Kaufoption,
- den **Short-Call**, d.h. den Verkauf einer Kaufoption,
- den **Long-Put**, d.h. den Kauf einer Verkaufsoption,
- den **Short-Put**, d.h. den Verkauf einer Verkaufsoption.

Wen das noch nicht genug verwirrt hat, den möge das folgende Zitat von Serge Demolière endgültig verzweifeln lassen:

„Welcher Laie wird wohl je verstehen, dass der Verkäufer der Verkaufsoption bei Ausübung der Verkaufsoption durch den Käufer der Verkaufsoption der Käufer des von dem Käufer der Verkaufsoption verkauften Wertpapieres ist?“

Das Verhalten des Inhabers einer Option hängt natürlich davon ab, wie sich der Kurs $S(t)$ der Aktie mit der Zeit t entwickelt. Schauen wir uns doch einmal den Inhaber eines europäischen Calls mit Ausübungspreis E genauer an und durchleuchten seine Handlungsmöglichkeiten:

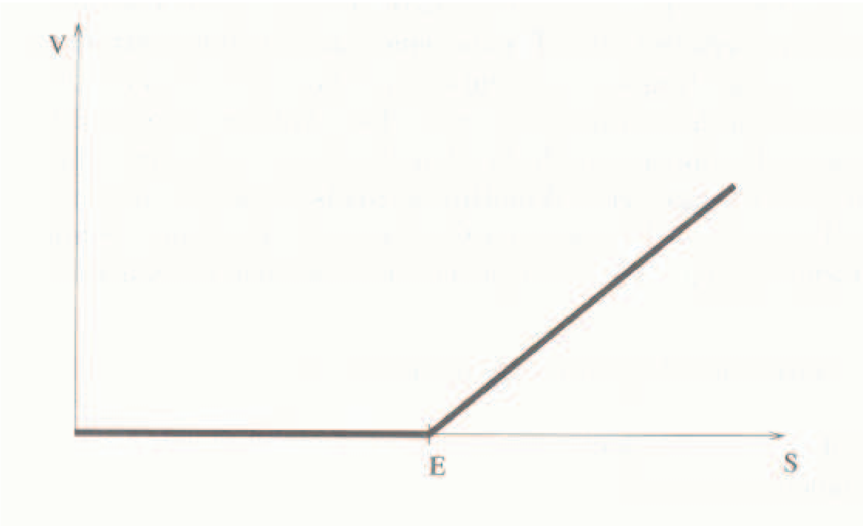
Im Falle $E < S(T)$ wird er die Option ausüben (also die Aktie zum Preis E kaufen). Denn dann kann er sie ja sofort für den dann herrschenden Marktpreis $S(T)$ weiterverkaufen und so einen Gewinn von $S(T) - E$ machen.

Im Falle $E \geq S(T)$ wird er die Option nicht ausüben, weil er die Aktie dann billiger (oder gleich teuer) zum dann herrschenden Marktpreis an der Börse kaufen kann. Zum Ende der Laufzeit T der Option hat man also die folgende **Auszahlungsfunktion eines europäischen Calls**:

$$
\begin{aligned}
V^{\text{Call}}(T) &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \; S(T) \leq E, \\ S(T) - E & , \text{ falls } \; S(T) > E. \end{cases} \\
&= \max\{S(T) - E, 0\} \\
&= (S(T) - E)^+.
\end{aligned}
$$

Die beiden letzten Schreibweisen sind Abkürzungen für die erste Fallunterscheidung.

Es ergibt sich graphisch also die folgende Auszahlungsfunktion in Abhängigkeit von $S(T)$:



Auszahlungsfunktion eines Calls mit Ausübungspreis E in Abhängigkeit von $S(T)$

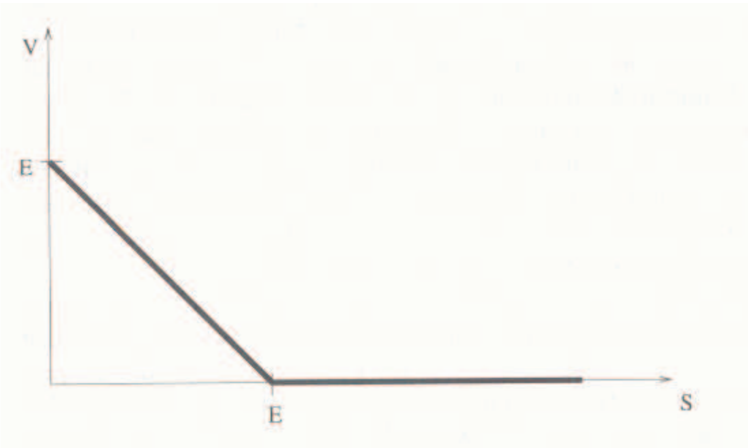
Analog ergibt sich für die **Auszahlungsfunktion eines europäischen Puts**:

$$
\begin{aligned}
V^{\text{Put}}(T) &= \begin{cases} E - S(T) & , \text{ falls } S(T) < E, \\ 0 & , \text{ falls } S(T) \geq E. \end{cases} \\
&= \max\{E - S(T), 0\} \\
&= (E - S(T))^+.
\end{aligned}
$$

Gruppenaufgabe:

Wie sieht die graphische Darstellung der Auszahlungsfunktion bei einem europäischen Put aus?

Zur Kontrolle sei sie hier angegeben:



Auszahlungsfunktion eines Puts mit Ausübungspreis E in Abhängigkeit von $S(T)$

Man sieht im Vergleich der beiden Auszahlungsfunktionen, dass bei einem Put die Gewinnmöglichkeit beschränkt ist (da der Aktienkurs nicht negativ werden kann), während bei einem Call der Gewinn theoretisch beliebig groß werden kann.

Wir wollen die graphische Darstellung der Auszahlungsfunktion noch etwas an exotischeren Beispielen üben:

Aufgabe 2:

Skizziere die Auszahlungsfunktionen der folgenden Optionen:

(a) **Long-Straddle**:

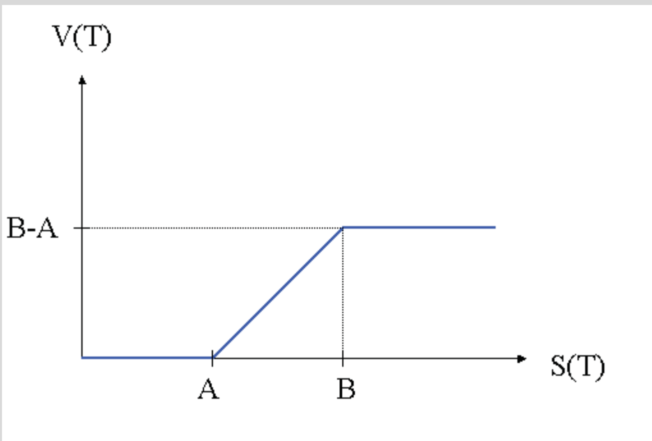
Der Long-Straddle ist der gleichzeitige Kauf eines Calls und eines Puts auf die gleiche Aktie, mit gleicher Laufzeit und gleichem Ausübungspreis.

(b) **Ratio-Call-Price-Spread**:

Man verkauft zwei Calls auf die gleiche Aktie, mit gleicher Laufzeit und gleichem Ausübungspreis und kauft zugleich einen weiteren Call auf die gleiche Aktie, mit gleicher Laufzeit, aber **niedrigerem** Ausübungspreis. Man ist also zwei Calls short und einen long. Beispiel: Man kauft einen Call mit einem Ausübungspreis von 260 Euro und verkauft zwei Calls mit jeweils einem Ausübungspreis von 280 Euro.

(c) **Bull Spread**:

Und jetzt mal die Umkehrung: Schau dir das folgende Bild an: Mit welcher Kombination aus Calls und/oder Puts kannst du diese Auszahlungsfunktion erreichen?



In der Regel wechselt beim Ausüben der Option übrigens die Aktie nicht wirklich den Besitzer, sondern es findet ein **Barausgleich** statt. (Bei Optionen auf Indices (wie etwa den DAX) ist natürlich von vorneherein nur ein Barausgleich möglich, schließlich kann man Teile des DAX nicht erwerben.) Die ausgebenden Bankhäuser treten hierbei oft als **Market Maker** auf, d.h. sie stellen sicher, dass für die Optionen auch ein ausreichender Markt existiert (den sie notfalls auch künstlich aufrechterhalten), dass die Barausgleiche reibungslos funktionieren und dass vorher genug Sicherheiten hinterlegt worden sind.

Eine Option ist also eine Art **Wette** mit dem Stillhalter der Option, also (meistens) der Bank: eine Wette auf die zukünftige Entwicklung des Aktienkurses! Tritt die erhoffte Entwicklung ein, so lassen sich vielfach wesentlich höhere Gewinne erzielen als wenn man die entsprechenden Aktien direkt gekauft bzw. verkauft hätte. (Andernfalls hingegen bekommt man gar nichts.) Man spricht in diesem Zusammenhang daher auch vom **Hebeleffekt** einer Option.

Dennoch sind Optionen nicht nur (aber natürlich auch!) Spekulationsobjekte für Zocker!

Optionen haben noch eine viel wichtigere Funktion, nämlich die des **Hedgings** (einer Art Absicherung) von bestehenden Aktienportfolios.[2]

Erinnern wir uns an einen Put: Man gewinnt genau bei hinreichend **fallenden** Aktienkursen etwas, nämlich genau dann, wenn der Marktpreis $S(T)$ am Ende der Laufzeit des Puts kleiner ist als der Ausübungspreis E.

Von daher kann man Puts in der Tat als eine Art Versicherung für ein Aktienportfolio ansehen: Will man sicherstellen, dass eine Aktie zum Zeitpunkt T mindestens den Wert E haben soll, so kauft man einen Put auf diese Aktie mit Laufzeit T und Ausübungspreis E. Dann hat man nämlich (unter Vernachlässigung sämtlicher Kosten) einen Gesamtwert von

$$S(T) + \underbrace{(E - S(T))^+}_{\geq E - S(T)} \geq S(T) + E - S(T) = E.$$

[2]Ein Portfolio ist eine Sammlung von Wertanlagen.

Das Risiko von Kursschwankungen ist damit weitesgehend abgedeckt.

Da die Auszahlungsfunktionen von Standard-Optionen, wie oben gesehen, niemals negativ sind, man also keinen Verlust (gegebenenfalls aber einen Gewinn) machen kann, sind solche Optionen natürlich nicht kostenlos zu haben (sonst hätte man eine klassische Arbitragemöglichkeit[3]!). Man muss Optionen also für einen bestimmten Preis kaufen. Zur Frage eines solchen (fairen!) Preises für eine Option kommen wir weiter unten. Im Fall eines **Puts** zum Hedging eines Portfolios können wir diesen Optionspreis quasi als eine Art Versicherungsprämie ansehen.

Bisher haben wir nur europäische Optionen betrachtet. Bei amerikanischen Optionen ergeben sich keine so leichten Auszahlungsfunktionen, da man die Option ja jederzeit ausüben darf. Dennoch werden wir im folgenden Modell auch eine Möglichkeit finden faire Preise für solche Optionen zu bestimmen. Tendenziell sollten amerikanische Optionen teurer sein als europäische Optionen, da man ja mehr Wahlmöglichkeiten hat. Mal sehen, ob dies dann auch wirklich so sein wird. Warten wir es ab!

Der Wert (also der Preis) einer Option $V(t)$ zum Zeitpunkt t hängt nicht nur vom Aktienkurs $S(t)$ zu diesem Zeitpunkt und der Laufzeit der Option ab, sondern auch von weiteren Marktdaten, nämlich dem „risikofreien Zinssatz“ r (das ist grob gesagt der Zinssatz, den man erhält, wenn man sein Geld auf einem Tagesgeldkonto parkt) und der sogenannten **Volatilität** σ der Aktie. Unter letzterem versteht man die Schwankungsbreite, Streuung oder Fluktuation der Aktie. Die Einheiten von r und σ sind jeweils „pro Jahr“ zu verstehen, auch die Zeit t wird in Jahren gemessen. Die Schreibweise $\sigma = 0.2$ bedeutet eine Volatilität von 20 %, und $r = 0.05$ steht für einen Zinssatz von 5 %.

Nun werden wir ein erstes (diskretes) Modell kennenlernen, mit dem wir faire Preise für Optionen bestimmen können, nämlich das **Binomialmodell**.

[3] Arbitrage bedeutet das Ausnutzen von Preisdifferenzen zwischen verschiedenen Märkten. Eine Arbitragemöglichkeit liegt vor, wenn man mit Hilfe einer Handelsstrategie ohne Kapitaleinsatz einen Gewinn mit positiver Wahrscheinlichkeit erzielen kann und gleichzeitig mit absoluter Sicherheit keinen Verlust zu befürchten hat. Solche Arbitragemöglichkeiten treten in transparenten und aktiven Märkten immer nur sehr kurzfristig auf; denn sobald eine solche Arbitragemöglichkeit besteht, versuchen natürlich sehr viele Marktteilnehmer diese ausnutzen, wodurch sich die Preise dann aber auch schnell wieder auf marktgerechte Preise angleichen und die Arbitragemöglichkeit verloren geht.

Kapitel 3

Das Binomialmodell

In diesem Kapitel orientiere ich mich, wie auch in den folgenden Kapiteln, zum Teil sehr eng an dem Buch „Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten“ von Rüdiger Seydel, nehme aber natürlich starke didaktisch motivierte Reduktionen und zugleich beschreibende Ergänzungen vor.

Wir nehmen an, dass am Finanzmarkt ein konstanter, risikoloser, stetiger Zinssatz r [1] vorherrscht. Das bedeutet Folgendes: Wir befinden uns aktuell im Zeitpunkt $t = 0$. Bringt man ein Kapital von K Euro zur Bank und lässt es dort T Zeiteinheiten (bei uns sind dies, wie gesagt, immer Jahre: $T = \frac{1}{12}$ wäre also ein Monat) liegen, so erhält man zum Zeitpunkt T genau

$$K \cdot e^{r \cdot T} \quad \text{Euro}^2$$

ausbezahlt. Neben dieser sicheren Geldanlage kann auf unserem kleinen Markt eine Aktie und eine (Call- oder Put)-Option auf diese Aktie gehandelt werden. Es sei im Folgenden T der Fälligkeitszeitpunkt (und somit, da wir uns

[1] Auch wenn wir uns im weiteren Verlauf des Kapitels ausschließlich im diskreten Rahmen befinden, werden wir der Einfachheit halber immer mit diesem stetigen Zinssatz rechnen. Das ist zwar strenggenommen falsch, aber verhindert unübersichtliche Transformationen und verursacht für hinreichend viele Zeitschritte, also kurze Zeitabstände, nur einen vernachlässigbaren Fehler.

[2] Hierbei ist $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828$ die bekannte **Eulersche Zahl**. In excel gibt man sie mit `EXP(1)` ein. Für eine unterjährige Verzinsung mit n Zinsperioden, einem Jahreszinssatz r und einer Laufzeit von T Jahren ergibt sich ein Aufzinsungsfaktor von $\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nT}$. Lässt man hier n, also die Anzahl der Zinsperioden, gegen ∞ streben, so erhält man den stetigen Aufzinsungsfaktor e^{rT}.

im Zeitpunkt $t = 0$ befinden, zugleich die Laufzeit) einer vorgegebenen Option. Weiterhin sei M die Anzahl der Zeitschritte, an denen wir in unserem Modell eine Änderung des Aktienkurses zulassen, und somit ist

$$\Delta t := \frac{T}{M}$$

die Zeitspanne zwischen zwei Kurssprüngen.

Für $0 \le t \le T$ sei $S(t)$ der Kurs der Aktie zum Zeitpunkt t, und mit

$$t_i = i \cdot \Delta t \qquad (i = 0, 1, \ldots, M)$$

ist daher

$$S_i := S(t_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, M)$$

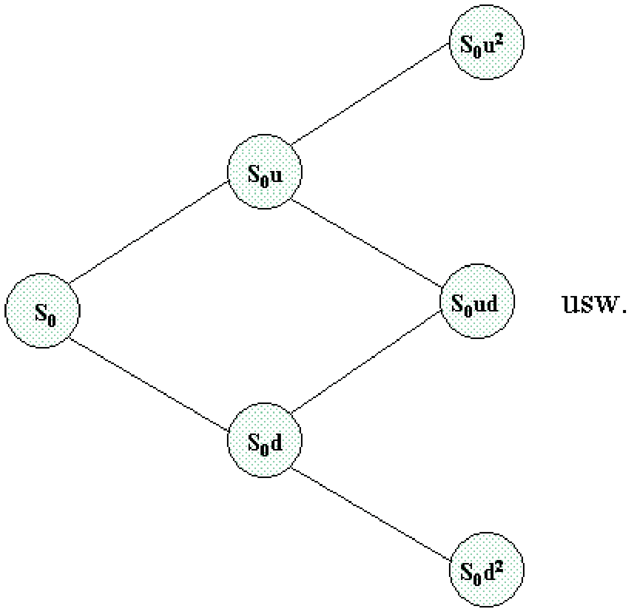
der Kurs der Aktie nach i Zeitschritten, also zum Zeitpunkt t_i.

Wie soll sich nun die Aktie vom Zeitpunkt t_i bis zum Zeitpunkt $t_i + \Delta t$ ändern können, d.h. welche Übergänge von S_i zu S_{i+1} sollen möglich sein?

Wir vereinbaren, dass die Aktie nur mit einer Wahrscheinlichkeit p um den Faktor $u > 1$ („up“) steigen und mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um den Faktor $0 < d < 1$ („down“) fallen kann. Es soll also Folgendes gelten:

$$S_{i+1} = \begin{cases} S_i \cdot u & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p\,, \\ S_i \cdot d & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p\,. \end{cases}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Aktienpreis ja S_0. Dann erhält man einen Baum der folgenden Struktur:



der Baum im Binomialmodell

Hierbei vereinbaren wir die folgenden

Bedingungen:

Zunächst einmal soll, wenn S_i bekannt ist, der erwartete Wert von S_{i+1} gerade dem um den Zinssatz r stetig verzinsten Wert von S_i entsprechen. Das heißt Folgendes:

Wir wählen die Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p$ so, dass ein Handelsteilnehmer „im Mittel" mit seinen Aktien genau die gleiche Rendite erzielt, als wenn er seine Aktien zu Beginn verkauft und das Geld sicher an der Bank anlegt. Es soll also gelten:

$$E[S_{i+1}|S_i \text{ bekannt}] = p \cdot S_i \cdot u + (1-p) \cdot S_i \cdot d \overset{!}{=} S_i \cdot e^{r \cdot \Delta t} .$$

Die für einen Handelsteilnehmer subjektiv angenommene oder (abstrakt gesehen) „tatsächliche" Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie steigt, hat dann mit p nicht viel zu tun, d.h. wir führen sozusagen „künstliche Wahrscheinlichkeiten" ein, sogenannte **Martingalwahrscheinlichkeiten**, die uns die Ermittlung fairer Preise für die Optionen erleichtern. Diese Martingalwahrscheinlichkeiten ergeben sich automatisch aus dem Modell des Markets und der obigen Bedingung, wie im Folgenden genauer erläutert wird. Der Markt selber „entscheidet“ also, mit welchen Wahrscheinlichkeiten wir hier rechnen müssen.

Gibt man sich eine Volatilität σ vor und einigt sich auf die (relativ willkürliche) Bedingung

$$u \cdot d = 1$$

(d.h. falls die Aktie fällt und dann wieder steigt, so soll sich insgesamt nichts getan haben), dann kann man u, d und p (strenggenommen nur näherungsweise) berechnen. Auf die recht komplizierte Herleitung soll an dieser Stelle verzichtet werden, ich gebe hier nur das Ergebnis an: Man erhält mit

$$\beta := \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\cdot \Delta t} \right)$$

die Beziehungen:

$$\begin{aligned} u &= \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}, \\ d &= \frac{1}{u} = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}, \\ p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \end{aligned}$$

Für die Gültigkeit des Modells ist zudem wichtig, dass

$$d < e^{r\Delta t} < u$$

gilt, d.h. man kann im günstigen Fall mit der Aktie zwischen zwei Zeitschritten eine höhere Rendite erzielen als mit der sicheren Bankanlage, umgekehrt aber im ungünstigen Fall auch eine niedrigere Rendite. Hätte man diese Bedingung nicht, so könnte man ohne jegliches Verlustrisiko mit positiver Wahrscheinlichkeit mehr Geld erzeugen als im Falle der risikolosen Anlage bei einer Bank oder umgekehrt. Man hätte dann eine **Arbitragemöglichkeit**, die wir aber in unserem Modell nicht zulassen wollen.

Damit können wir den obigen Binomialbaum nun bis zum Zeitpunkt T vollständig berechnen und erhalten so alle möglichen Werte, die die Aktie annehmen kann.

Gruppenaufgabe:

Eine Aktie habe einen heutigen Wert von 50 Euro. Wir wollen den Binomialbaum für einen Zeitraum von 3 Handelstagen (ausschließlich dem heutigen Tag) aufstellen und dabei tägliche Sprünge der Aktie zulassen (d.h. wir arbeiten mit $M = 3$ Zeitschritten). Gehe bei der Berechnung von Δt davon aus, dass ein Jahr 250 Handelstage hat und daher $T = \frac{3}{250}$ gilt. Als Volatilität haben wir $\sigma = 0.3$ aus den Marktdaten geschätzt. Am Markt herrsche zudem ein risikoloser Zinssatz von $r = 0.05$ vor. Berechne u, d und p und zeichne den entsprechenden Binomialbaum.

Wie kommen wir nun an die fairen Optionspreise?

Zunächst zur Notation: Den fairen Preis einer Option zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $V(t)$. Demzufolge ist dann

$$V_i := V(t_i) \qquad \text{mit} \qquad t_i := i \cdot \Delta t$$

der faire Preis der Option nach i Zeitschritten.

Die Idee ist nun die folgende:

$\boxed{\text{Wir hangeln uns von der Zukunft rückwärts in die Gegenwart!}}$

Starten wir also in der Zukunft, und zwar im Fälligkeitszeitpunkt T. Wie teuer wird dann wohl (theoretisch, denn praktisch wird so etwas natürlich nicht verkauft!) ein Call mit Basiswert E und Fälligkeitszeitpunkt T sein, der dann, wenn man ihn erwirbt, entweder sofort ausgeübt wird oder aber sofort verfällt?

Offenbar muss ein fairer Preis dieses Produkts dann genau so hoch sein wie die Auszahlungsfunktion selbst, also wie $(S(T) - E)^+$. Denn wäre der Preis der Option niedriger als der Wert der Auszahlungsfunktion, so kaufe ich mir die Option, übe sie sofort aus und mache risikolosen Gewinn. Wäre der Preis der Option höher als der Wert der Auszahlungsfunktion, so verkauft umgekehrt die Bank die Option an einen Kunden zu diesem Preis und macht selbst dann, wenn dieser die Option ausübt, einen risikolosen Gewinn. In beiden Fällen hätte einer der Marktteilnehmer eine Arbitragemöglichkeit. Also gilt für den fairen Callpreis zum Zeitpunkt $T = t_M$, also nach M Schritten:

$$V(T) = (S(T) - E)^+ ,$$

oder in anderer Schreibweise:

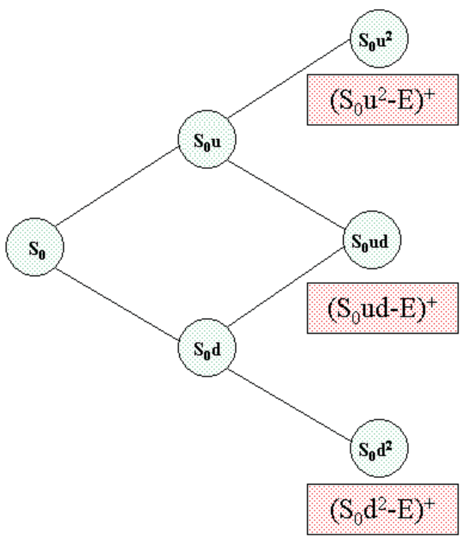
$$V_M = (S_M - E)^+ .$$

(Beachte: $V(T) = V(t_M) = V_M$ und $S(T) = S(t_M) = S_M$.)

Ist zum Beispiel die Aktie bis zum Zeitpunkt $t_M = T$ genau j-mal nach oben und $(M - j)$- mal nach unten gesprungen, dann wäre:

$$V_M = (S_0 \cdot u^j \cdot d^{M-j} - E)^+.$$

Damit können wir im Falle $M = 2$ die Optionswerte zum Zeitpunkt $T = t_M = t_2$ schon einmal eintragen:



Optionswerte am Fälligkeitszeitpunkt

Entsprechend erhalten wir für den fairen Preis eines Puts zum Zeitpunkt $T = t_M$:

$$V(T) = (E - S(T))^+ \,,$$

oder in anderer Schreibweise:

$$V_M = (E - S_M)^+ \,.$$

Wie können wir uns nun, ausgehend vom Zeitpunkt T, „zurück in die Gegenwart“ hangeln?

Wenn wir also $V_{i+1} = V(t_{i+1})$ kennen, wie kommen wir dann zu $V_i = V(t_i)$?

Nun, wir wissen bereits (so hatten wir p gerade gewählt), dass bei bekanntem S_i die Beziehung

$$S_i = e^{-r\Delta t} \cdot \Big(p \cdot S_i u + (1-p) \cdot S_i d\Big)$$

gilt („der heutige Aktienpreis ist der abgezinste erwartete morgige Aktienpreis“, wobei die Erwartung unter der „künstlichen Martingalwahrscheinlichkeit“ (siehe oben) gebildet wird, d.h. nicht **wir** erwarten hier etwas als Anleger, sondern **der Markt**!).

Eine ähnliche Beziehung erhalten wir nun, wie man streng mathematisch beweisen kann, auch für die europäischen Optionspreise:

Der heutige Optionspreis ist der abgezinste erwartete Optionspreis von morgen (wobei wieder der Markt etwas erwartet, nicht wir selbst)!

Also:

$$\begin{aligned} & [\text{Optionspreis zum Zeitpunkt } t_i] \\ = \; & e^{-r\Delta t} \cdot \Big([\text{Optionspreis zum Zeitpunkt } t_{i+1}, \text{falls die Aktie steigt}] \cdot p \\ & \quad + [\text{Optionspreis zum Zeitpunkt } t_{i+1}, \text{falls die Aktie fällt}] \cdot (1-p)\Big). \end{aligned}$$

Etwas kompakter geschrieben:

$$V_i(S_i) = e^{-r\Delta t} \cdot \Big(V_{i+1}(S_i u) \cdot p + V_{i+1}(S_i d) \cdot (1-p) \Big).$$

Dies ist eine klassische **(Rückwärts-)Rekursionsgleichung** für

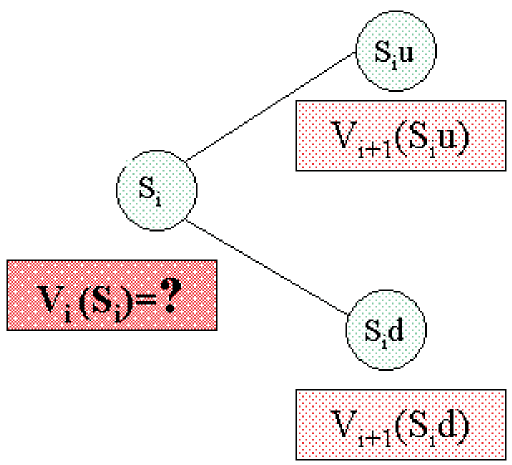
$i = M-1, M-2, \dots, 1, 0.$

Man kommt so, Schritt für Schritt, rückwärts in der Zeit, zum gesuchten Optionspreis V_0 von heute.

Noch einmal mit anderen Worten und ganz praktisch zu einem einzelnen Rekursionsschritt:

Nehmen wir an, wir kennen die Optionspreise zum Zeitpunkt t_{i+1}, in Abhängigkeit vom Kurs S_{i+1} der Aktie, alle schon. Weiterhin kennen wir den Aktienpreis S_i zum Zeitpunkt t_i.

Dann liegt der folgende Ausschnitt eines Binomialbaumes vor, wobei in den Kreisen die Aktienpreise und in den Kästchen die Optionspreise stehen:



Rekursionsschritt bei der Optionsbewertung im Binomialmodell

Damit können wir nun $V_i(S_i)$ aus allen gegebenen Größen durch die oben bereits erwähnte Gleichung bestimmen:

$$V_i(S_i) = e^{-r\Delta t} \cdot \Big(V_{i+1}(S_i u) \cdot p + V_{i+1}(S_i d) \cdot (1-p)\Big)$$

Beispiel

Es seien

$$\begin{aligned} u &= 1.25, \\ d &= 0.8, \\ S_i &= 80, \\ r &= 0.05, \\ \Delta t &= \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

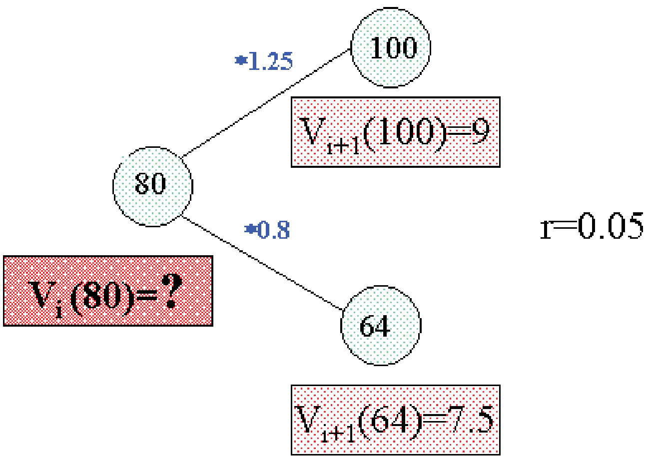
Dann ist

$$S_{i+1} = 80 \cdot 1.25 = 100 \qquad \text{oder} \qquad S_{i+1} = 80 \cdot 0.8 = 64.$$

Es sei bereits bekannt, dass

$$V_{i+1}(S_{i+1} = 100) = 9 \qquad \text{und} \qquad V_{i+1}(S_{i+1} = 64) = 7.5.$$

Es liegt also die folgende Situation vor:



Dann ist

$$V_i(80) = e^{-0.05\cdot\frac{1}{64}} \cdot \left(9 \cdot \frac{e^{0.05\cdot\frac{1}{64}} - 0.8}{1.25 - 0.8} + 7.5 \cdot \frac{1.25 - e^{0.05\cdot\frac{1}{64}}}{1.25 - 0.8}\right) \approx 8.16.$$

Zusatzaufgabe:

Gehe nun zu deinem Binomialbaum aus der obigen Gruppenaufgabe zurück und berechne den fairen Preis eines Calls mit Basiswert 49.50 Euro. Alle anderen Daten bleiben gleich.

Wie ihr vielleicht schon bemerkt habt, haben wir die errechneten Aktienkurse für alle Zeiten $t < T$ zur Berechnung der europäischen Optionspreise gar nicht benötigt! Für $V_M = V(T)$ benötigte man nämlich nur $S_M = S(T)$ und in der Rekursion selbst dann nur noch die bereits berechneten Optionspreise aus der Zukunft. Bei amerikanischen Optionen hingegen sieht das anders aus. Dort werden die Rekursionsformeln komplizierter und es gehen dort auch die gesamten Aktienkurse des Binomialbaumes ein. Der Grund ist einfach: Man muss ja in jedem Zeitschritt überprüfen, ob es nicht vielleicht günstiger ist die Option vorzeitig auszuüben, und für diese Entscheidung muss man die aktuellen Aktienkurse natürlich kennen.

Doch zunächst einmal zurück zu den europäischen Optionen: Für einen europäischen Call könnt ihr ja mal ein fast fertig gestelltes „Programm“ auf der Excel-Oberfläche durch die Rekursionsformeln ergänzen:

Aufgabe 3:

Vervollständige das Excel-Blatt binomial1.xls durch die Rekursionsformeln und berechne damit den fairen Preis eines europäischen Calls mit den Daten

$$E = 10,\ S_0 = 11,\ r = 0.06,\ \sigma = 0.3 \quad \text{und} \quad T = 1.$$

Beachte, dass du auch $\Delta t = \frac{T}{M}$ berechnen musst. M ist die Anzahl der Zeitschritte, die in diesem primitiven Programm fest vorgegeben ist.

Theoretisch könnten wir den Wert natürlich auch mit einer **Simulation** näherungsweise lösen:

Wir simulieren einfach verschiedene Aktienverläufe, schauen uns an, welchen Betrag wir am Schluss bei unserem Call ausbezahlt bekommen, bilden dann von all diesen Auszahlungen den Mittelwert (dann haben wir die erwartete Auszahlung der Option geschätzt!) und zinsen auf das heutige Datum ab. Dann sollte der so ermittelte Wert näherungsweise dem vorher errechneten Wert entsprechen.

Wir bilden also:

$$\boldsymbol{\hat{V}_0 = e^{-rT} \cdot [\textbf{Mittelwert der Auszahlung am Ende der Laufzeit}],}$$

also im Falle eines europäischen Calls:

$$\boldsymbol{\hat{V}_0 = e^{-rT} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(S^{(k)}(T) - E\right)^+ ,}$$

wobei $S^{(k)}(T)$ der Aktienpreis zum Zeitpunkt T im k-ten Simulationsschritt und N die Anzahl der Simulationsschritte sind.

Aufgabe 4:

Vervollständige das Simulationsprogramm binomial2.xls und berechne wieder (diesmal simulativ) für

$$E = 10,\ S_0 = 11,\ r = 0.06,\ \sigma = 0.3 \quad \text{und} \quad T = 1$$

den fairen Preis eines europäischen Calls.

Nun könnt ihr euch mal ein komplettes Programm zur Optionspreisberechnung mit dem Binomialmodell anschauen, bei dem man zwischen Call und Put sowie zwischen einer europäischen und amerikanischen Option wählen kann.

Gruppenaufgabe:

Experimentiert mal mit dem Programm binomial3.xls und versucht es zu verstehen. Dreht ein bisschen an den Parametern und überprüft, welchen Einfluss die einzelnen Parameter haben. Habt ihr plausible Erklärungen für die sich jeweils ergebenden Preisänderungen?

Vergleicht nun mal europäische und amerikanische Calls mit den ansonsten identischen Parametern. Was fällt euch auf? Wie sieht es im Vergleich dazu mit den Puts aus?

Je größer M gewählt ist (d.h. desto kleiner die Zeitdifferenz Δt ist), desto mehr ähneln die Preise den theoretischen Werten des Black-Scholes-Modell, das wir noch kennenlernen werden. Berechne nun mit möglichst hoher Genauigkeit den fairen Preis eines europäischen Calls mit den Daten, die wir schon häufiger hatten: $E = 10$, $S_0 = 11$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$ und $T = 1$. Vergleiche den Wert mit den Ergebnissen von Aufgabe 3 und 4.

Bemerkung:

Folgende **Erweiterungen des Modells/Programms** sind denkbar, die wir aber angesichts fehlender Zeit nicht mehr betrachten und einbauen wollen:

(1) Man kann Dividendenzahlungen einbauen.

(2) Man kann statt zwei auch drei Entwicklungsmöglichkeiten der Aktie in jedem Zeitschritt einbauen und erhält dann den sogenannten **Trinomialbaum**. Dieser erlaubt eine noch bessere Genauigkeit.

Kapitel 4

Normalverteilung und normalverteilte Zufallszahlen

Zur Erinnerung: Führt man einen Versuch, dessen Erfolg mit Wahrscheinlichkeit p eintritt, n-mal unabhängig voneinander durch und misst $X_{n,p}$ die Anzahl der erfolgreichen Versuche, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau k der n Versuche erfolgreich sind, gerade

$$P(X_{n,p} = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

wobei

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}.$$

Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die **Binomialverteilung $\boldsymbol{B_{n,p}}$** mit den Parametern n und p. Wir schreiben:

$$B_{n,p}(k) = P(X_{n,p} = k).$$

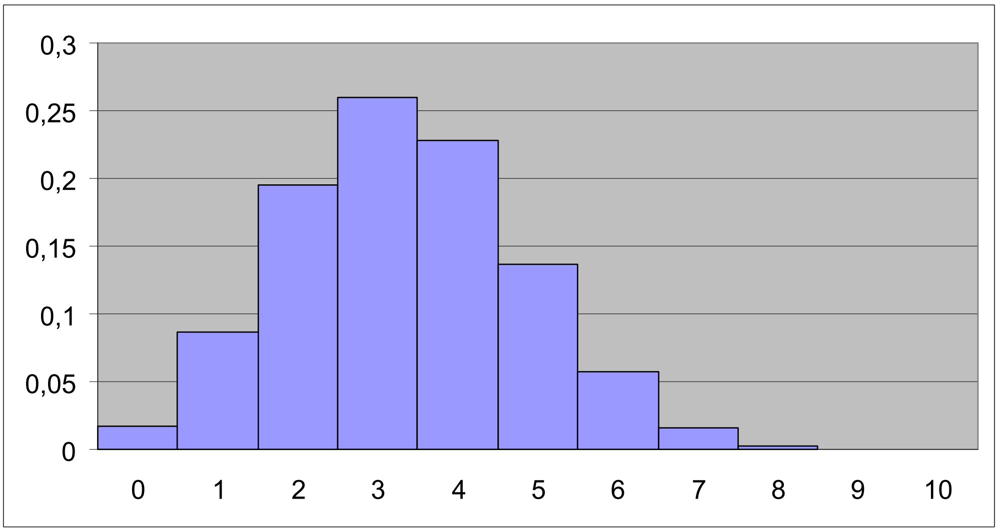
Beispiel

Die Wahrscheinlichkeit, bei 100 Würfen mit einem normalen Würfel genau 10 Sechsen zu würfeln, beträgt:

$$B_{100,\frac{1}{6}}(10) = \binom{100}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{90}.$$

Wir interessieren uns nun dafür, wie sich die Binomialverteilung bei festem p mit wachsendem n verhält.

Dazu betrachten wir die zugehörigen **Histogramme** der Binomialverteilung. Darunter verstehen wir in diesem Zusammenhang Balkendiagramme, bei denen man bei festem n und festem p $n+1$ direkt aneinander angrenzende rechteckige Balken erhält, wobei für $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ der k-te Balken eine Breite der Länge 1 und Höhe $B_{n,p}(k)$ besitzt. Für $n = 10$ und $p = \frac{1}{3}$ etwa sieht ein solches Histogramm wie folgt aus:



Histogramm der Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{3}$

Aufgabe 7:

Erzeuge nun mit excel für verschiedene Werte von n und p die zugehörigen Histogramme. Was für Gesetzmäßigkeiten fallen dir auf?

(Tipp: In excel erzeugt man den Wert $B_{n,p}(k)$ mit

`BINOMVERT`$(k; n, p,$ `FALSCH`$)$.

Erzeuge diese Zahlen für $k = 0, \ldots, n$ und plotte mit ihnen ein Histogramm (also ein Balkendiagramm, wie oben beschrieben).)

Es fällt auf, dass bei festem p mit größer werdendem n der Schwerpunkt immer weiter nach rechts wandert und das Histogramm immer mehr „verschmiert“, also flacher und langgezogener wird. Dies ist auch kein Wunder, da für den Erwartungswert einer $B_{n,p}$-verteilten Zufallsvariable $X_{n,p}$

$$E[X_{n,p}] = n \cdot p$$

und für deren Varianz

$$Var[X_{n,p}] = n \cdot p \cdot (1-p)$$

gilt.

Um die Histogramme vergleichbar zu machen, müssen wir daher die Zufallsvariablen **standardisieren**, d.h. in einem gewissen Sinne normieren. Dies erreichen wir, indem wir den Erwartungswert abziehen und das Ergebnis durch die Wurzel der Varianz, also die Standardabweichung, teilen. Wir betrachten also statt $X_{n,p}$ die Zufallsvariable

$$X^\star_{n,p} = \frac{X_{n,p} - E[X_{n,p}]}{\sqrt{Var[X_{n,p}]}} = \frac{X_{n,p} - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Da $X_{n,p}$ die Werte $0, 1, \ldots, n$ annimmt, nimmt also $X^\star_{n,p}$ die Werte

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \qquad (k \in \{0, 1, \ldots, n\})$$

an. Man erhält nun, unabhängig von n:

$$E[X^\star_{n,p}] = 0$$

und

$$Var[X^\star_{n,p}] = 1.$$

Die neuen, standardisierten Histogramme bestehen nun aus Rechtecken der Breite $\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ (dies ist genau die Differenz $x_{k+1} - x_k$ zweier aufeinander folgender Werte), während ihre Höhen h_k gerade so gewählt sind, dass der

Flächeninhalt der entstehenden Rechtecke gleich den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X^{\star}_{n,p} = x_k) = P(X_{n,p} = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

ist. Demzufolge ist

$$h_k = \sqrt{np(1-p)} \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Gruppenaufgabe:

Gehe auf die Internetseite

http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/marlproj4/seiten/moivre01.htm

und erzeuge dort im zweiten (!) Applet verschiedene standardisierte Histogramme der Binomialverteilung. Mache dies speziell für $p = 0.3$ und wachsendem n. Was fällt dir auf?

Während im Falle $p = 0.3$ für kleine n die Unsymmetrie (Schiefe) des Histogramms noch deutlich zu sehen ist, erscheint es für größere n (vielleicht ab $n \geq 50$) wesentlich symmetrischer. Für noch größere n ähnelt das Schaubild fast 1:1 dem Graphen der berühmten Gaußschen Glockenkurve, die früher auf dem Zehnmarkschein zu bewundern war. Unter der Gaußschen Glockenfunktion versteht man die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

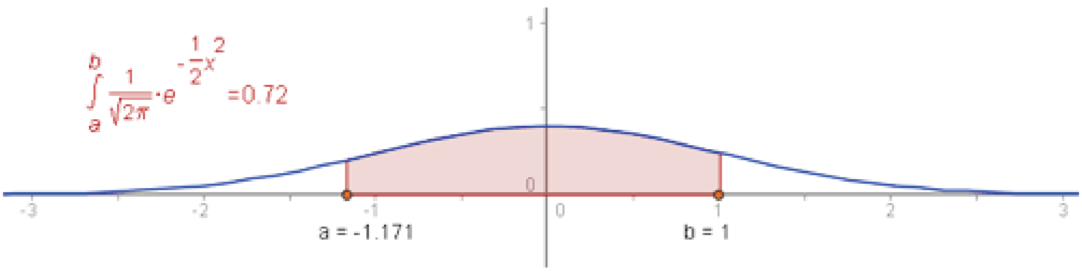
Mathematisch wird diese Funktion als **Dichtefunktion (kurz: Dichte) der Standardnormalverteilung** bezeichnet. Da der Inhalt der Fläche, die von dem Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird, gleich 1 ist, kann man die Fläche zwischen zwei beliebigen x-Werten a und b mit $a < b$ als Wahrscheinlichkeit dafür interpretieren, dass eine Messgröße (Zufallsvariable) Z, dessen Ausgang nach dieser Wahrscheinlichkeit verteilt ist, sich durch das Integral von a bis b berechnen lässt:

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

(Wer das Integral nicht kennt: Dies ist einfach die Fläche, die von dem Graphen, der x-Achse und den beiden vertikalen Linien $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird, siehe Skizze.)

Genau dann also, wenn die Wahrscheinlichkeit, zwischen zwei Werten a und b mit $a < b$ zu liegen, für eine Zufallsgröße Z durch das Integral $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ gegeben ist, nennt man Z **standardnormalverteilt**. Es gilt dann:

$$E[Z] = 0 \qquad \text{und} \qquad Var[Z] = 1.$$



die Wahrscheinlichkeit $P(a \leq Z \leq b)$ für die Standardnormalverteilung

Meistens erscheint die Kurve nicht so flach wie hier, da dann die Skalierung der x-Achse anders gewählt wird als die der y-Achse. An dieser Stelle wurde dies aber nicht gemacht, damit die Wahrscheinlichkeit auch tatsächlich gleich dem Inhalt der eingezeichneten Fläche unter einem einheitlichen Maßstab in x- und y-Richtung ist.

Die letzte Aufgabe lässt vermuten, dass beim Grenzübergang für $n \to \infty$ die Fläche des Histogramms der standardisierten Binomialverteilung zwischen zwei beliebigen Grenzen a und b tatsächlich gegen die Fläche unter der Dichte der Standardnormalverteilung zwischen diesen Grenzen konvergiert, also gegen das Integral $\int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Die Aussage des schwierig zu beweisenden **zentralen Grenzwertsatzes von Moivre-Laplace** ist nun gerade, dass die Binomialverteilung bei steigendem n tatsächlich in diesem Sinne gegen die Standardnormalverteilung konvergiert. Genauer gilt nach diesem Satz, wenn $X_{n,p}$ wie oben der Binomialverteilung mit den Parametern n und p genügt:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le X^\star_{n,p} \le b\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{X_{n,p} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

und

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X^\star_{n,p} \le b\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{n,p} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) = \int_{-\infty}^b \varphi(x)\,dx\,.$$

Da –dies sei für alle erwähnt, die sich mit Integrationen und Stammfunktionen auskennen– die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung keine elementare Stammfunktion besitzt, muss man numerische Approximationen einer speziellen Stammfunktion vornehmen. Genauer: Man errechnet die Wahrscheinlichkeiten $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ über die

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\boldsymbol{\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)\,dx.}$$

Es gilt nämlich dann (natürlich):

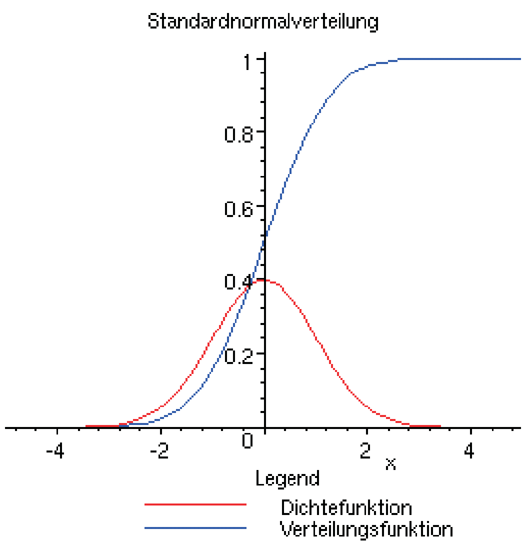
$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^b \varphi(x)\,dx - \int_{-\infty}^a \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Zwar kann man die Werte von $\Phi(z)$, wie gesagt, nicht exakt berechnen, aber in jedem Fall numerisch annähern, und diese Werte sind in vielen Tabellen aufgeführt oder im Computer als Standardfunktion implementiert (in Excel errechnet man $\Phi(z)$ etwa über `NORMVERT`$(z; 0; 1;$ `WAHR`$)$).

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

tabellierte Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Hier im Vergleich die Graphen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:



Dichte- und Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Wir wollen nun den zentralen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace ausnutzen, um die Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung $B_{n;p}$ für große n zu berechnen. Man sagt im Allgemeinen, dass die Annäherung „gut genug“ ist, wenn

$$np(1-p) \geq 9 \qquad \text{(Faustregel!)}$$

gilt. Dies versuchen wir nun zusammen an der Tafel mit Hilfe der Tabelle zu entwickeln:

Gruppenaufgabe:

Ein normaler Würfel wird 600mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass hierbei

(a) mindestens 90 und höchstens 110 Sechsen und

(b) mehr als 120 Sechsen

auftreten? Verwende dabei die Approximation über die Standardnormalverteilung!

Natürlich ist dieses Approximationsverfahren heutzutage bei vermehrt leistungsfähigen Computern nicht mehr so sehr von praktischem Interesse, dennoch stellt es einen historisch wichtigen Meilenstein dar.

Bemerkung:

Man kann diese Approximation noch durch eine sogenannte **Stetigkeitskorrektur** verbessern, indem man

$$P\left(a \leq X_{n,p} \leq b\right) = \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

rechnet, aber darauf wollen wir an dieser Stelle nicht näher eingehen.

Aus der Standardnormalverteilung kann man eine ganze Reihe anderer Normalverteilungen ableiten und zwar mit einem Erwartungswert μ und einer Varianz $\sigma^2 > 0$ (also einer Standardabweichung $\sigma > 0$).
Im Falle der Standardnormalverteilung war $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

Die zugehörige Dichtefunktion ist dann

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung wird mit

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

bezeichnet (also ist entsprechend $\mathcal{N}(0,1)$ die Standardnormalverteilung).

Das Maximum von φ_{μ,σ^2} liegt an der Stelle $x = \mu$ und die Wendepunkte an den Stellen $\mu \pm \sigma$. Man kann σ also als ein Maß für die „Breite“ der Dichtefunktion interpretieren. Eine genauere Interpretation sollt ihr euch jetzt selber experimentell erarbeiten:

Gruppenaufgabe:

Experimentiert einmal mit dem Applet

http://www.geogebra.org/de/examples/normalverteilung/normalverteilung.html

oder mit dem Applet

http://www.fh-friedberg.de/users/mlutz/JavaKurs/applets/
GaussFit/AppletNormalverteilung.html

und schaut euch den Einfluss von μ und σ^2 an.

Gebt mal eine Schätzung ab: Wie viele Punkte einer normalverteilten Datenreihe liegen ungefähr im Intervall $[\mu - \sigma,\, \mu + \sigma]$?

Was hat nun die Normalverteilung mit Aktien zu tun?

Nun, man hat festgestellt, dass die sogenannten **Log-Returns**

$$\ln\left(\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}\right)^{1}$$

in grober Näherung **normalverteilt** sind. Wenn man diese Log-Returns von realen Aktienkursen plottet, sollte man dies sehen können.

Wie macht man das am besten? Nun, man fertigt **Histogramme** an, ähnlich wie bei der Binomialverteilung vorher, nur diesmal nicht mit **theoretischen Wahrscheinlichkeiten**, sondern mit den **Häufigkeiten realer Daten** innerhalb bestimmter Klassen. Man teilt dabei die Datenmenge in Klassen (meistens Intervalle) ein und erhält ein Histogramm, indem man die gemessenen Häufigkeiten der Datenpunkte in den jeweiligen Klassen als aneinanderstoßende Rechtecke, deren Flächen proportional zu den Häufigkeiten der jeweiligen Klassen sind, darstellt. Wir wählen hierbei die Klassenbreite der Einfachheit halber konstant.

Gruppenaufgabe:

Im Excel-Arbeitsblatt t-aktie.xls findet ihr die Tagesschlusskurse der T-Aktie vom 20.10.2003 bis zum 19.10.2004. Berechnet die Log-Returns von einem zum nächstfolgenden Handelstag und plottet sie in einem geeigneten Histogramm. Ähnelt das Histogramm der Dichtefunktion einer Normalverteilung?

(Tipp: Die Log-Returns nehmen Werte im Intervall $[-0.1, 0.1]$ an. Es empfiehlt sich vielleicht die Klassen als Intervalle der Länge 0.01 zu wählen. Zählt nun, wie viele Log-Returns in den jeweiligen Klassen liegen und plottet das Ergebnis. Ihr könnt euch das Ergebnis auch im Programm t-aktie2.xls anschauen, aber versucht es bitte zunächst einmal selbst!)

[1] Hierbei ist $\ln = \log_e$ der **natürliche Logarithmus**, also der Logarithmus zur Basis e, wobei e wieder die Eulersche Zahl ist.

Bemerkung:

Mathematisch begnügt man sich natürlich nicht mit dem Zeichnen von Histogrammen und einer subjektiven Einschätzung. Stattdessen haben die Mathematiker **statistische Tests** entwickelt, mit denen man (mit einer gewissen Unsicherheit) feststellen kann, ob Daten normalverteilt sind oder nicht.

Genauere Untersuchungen mit Hilfe solcher Tests haben ergeben, dass die Log-Returns von Aktien eben doch nur in allererster Näherung einer Normalverteilung genügen, dass dabei aber bei realen Daten sehr hohe und sehr niedrige Werte der Log-Returns mit höherer Wahrscheinlichkeit auftreten als sie es bei einer Normalverteilung eigentlich „dürften". Mit anderen Worten: Nimmt man an, dass die Log-Returns von Aktien normalverteilt sind, so unterschätzt man die extremen Wertänderungen etwas. Aus diesem Grund hat man mittlerweile realistischere Modelle zur Modellierung der Aktienkurse entwickelt. Wir wollen aber in diesem Kurs der Einfachheit halber an der Annahme festhalten, dass die Log-Returns normalverteilt sind. Dieser Annahme liegt auch das Modell von Black-Scholes zugrunde, mit dem man Optionspreise anhand einer einfachen Formel direkt berechnen kann (dazu später mehr). Dieses Modell wird nach wie vor in der Praxis am häufigsten eingesetzt, auch wenn man sich im Klaren darüber ist, dass die Normalverteilungsannahme hier etwas kritisch ist.

Wir brauchen also, um Aktien zu simulieren, auf jeden Fall normalverteilte (Pseudo-)Zufallszahlen. Wie kommen wir an solche?

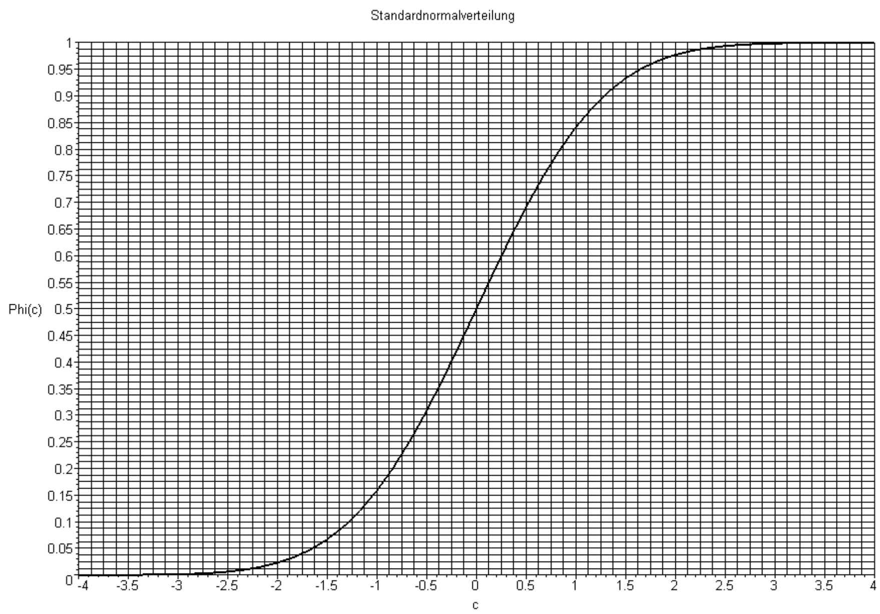
Erste Idee:

Man kann folgendes zeigen: Hat man „normale" (mathematisch: „gleichverteilte") Zufallszahlen U_i auf dem Intervall $(0, 1)$, so sind die Zufallszahlen

$$\Phi^{-1}(U_i)$$

standardnormalverteilte Zufallszahlen, wobei Φ^{-1} die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\Phi : \mathbb{R} \to (0, 1)$ ist.

Zur Erinnerung hier noch einmal der Graph von Φ:



Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Man könnte also einfach Zufallszahlen aus $(0, 1)$ erzeugen und diese mittels $\Phi^{-1}(z)$ auswerten und hätte dann standardnormalverteilte Zufallszahlen. Das Problem dabei ist:

Man kennt weder für Φ noch für Φ^{-1} geschlossene Formelausdrücke! Und die Annäherung von Φ^{-1} durch einfachere Funktionen gestaltet sich schwierig, da $\Phi^{-1}(u)$ bei $u = 1$ und $u = 0$ senkrechte Tangenten hat.

Gruppenaufgabe:

Versuche die Umkehrfunktion Φ^{-1} der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung zu skizzieren.

Zwar hat man mit diesem Ansatz mittlerweile akzeptable Ergebnisse erzielt, wir möchten unsere standardnormalverteilten Zufallszahlen aber mit einer ganz anderen, programmiertechnisch wesentlich einfacher umzusetzenden Methode erzeugen, nämlich mittels **Marsaglias Polar-Methode**:

1. Schritt: Erzeuge zwei (auf $[0, 1)$ gleichverteilte) Zufallszahlen U_1 und U_2.

2. Schritt: Setze $V_1 := 2U_1 - 1$ und $V_2 := 2U_2 - 1$.

3. Schritt: Überprüfe, ob $W := V_1^2 + V_2^2 < 1$ gilt.

Falls ja, dann mache mit **Schritt 4** weiter.

Falls nein, dann verwerfe die Zufallszahlen und gehe zurück zu **Schritt 1**.

4. Schritt: Setze: $Z_1 := V_1\sqrt{\frac{-2\ln(W)}{W}}$ und $Z_2 := V_2\sqrt{\frac{-2\ln(W)}{W}}$.

Dann sind Z_1 und Z_2 standardnormalverteilte Zufallszahlen.

Bemerkung

Die Wahrscheinlichkeit, dass $W < 1$ gilt, beträgt bekanntlich $\frac{\pi}{4} \approx 0.784\ldots$ (siehe unsere Monte-Carlo-Simulation zur Schätzung von π). Also wird in ca. 21% aller Ziehungen die Ziehung wegen $W \geq 1$ verworfen.

Zusatzaufgabe:

Schreibe ein kleines Programm, mit dem du mittels Marsaglias Polar-Methode 10000 standardnormalverteilte (Pseudo-)Zufallszahlen erzeugst. Plotte deine Zufallszahlen anschließend in einem geeigneten Histogramm.

Kapitel 5

Simulation von Aktienkursen

Wir betrachten den Prozess $(S(t))_{t\geq 0}$ der Kurse $S(t)$ zu Zeitpunkten t einer festen Aktie und möchten diesen Prozess mathematisch modellieren sowie stochastisch simulieren.

Dabei gehen wir von der Annahme aus (siehe vorausgehendes Kapitel), dass die Log-Returns

$$\ln\left(\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}\right)$$

normalverteilt und zudem (stochastisch) voneinander unabhängig sind. Letzteres bedeutet anschaulich (auf die exakte mathematische Definition verzichten wir), dass für

$$t_1 < t_1 + \Delta t < t_2 < t_2 + \Delta t$$

der Log-Return $\ln\left(\frac{S(t_1+\Delta t)}{S(t_1)}\right)$ keinen Einfluss auf die Höhe des Log-Returns $\ln\left(\frac{S(t_2+\Delta t)}{S(t_2)}\right)$ hat und umgekehrt.

Wir müssen also insbesondere so etwas haben wie:

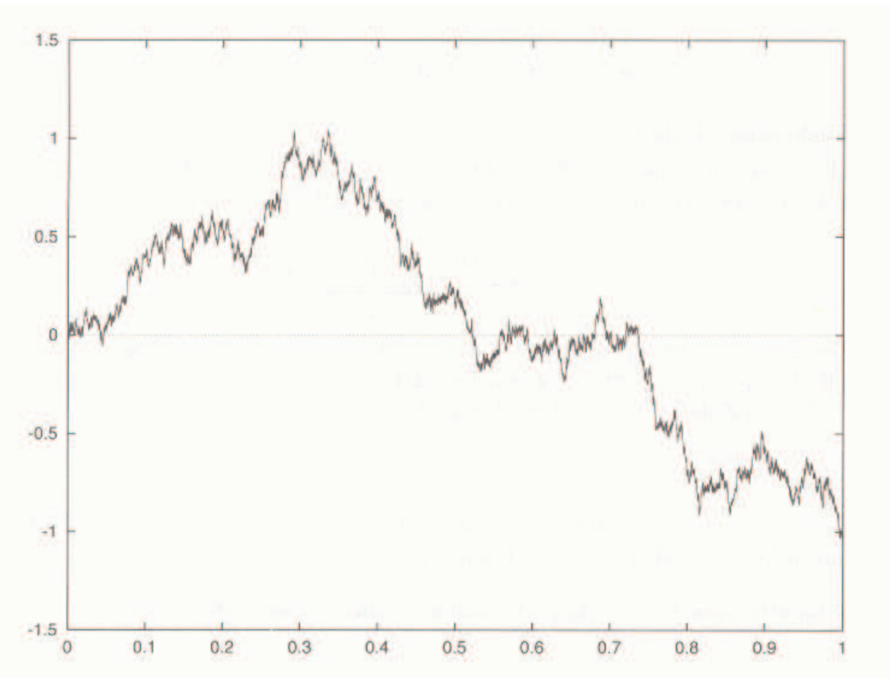
$$\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)} = e^{\text{irgendetwas Normalverteiltes}}.$$

Ein stochastischer Prozess $(W(t))_{t\geq 0}$, der genau die Eigenschaft hat, dass seine Zuwächse

$$W(t + \Delta t) - W(t)$$

normalverteilt (und zudem unabhängig voneinander) sind, ist der sogenannte **Wiener-Prozess**[1], besser bekannt als **Brownsche Bewegung**. Der Zuwachs $W(t + \Delta t) - W(t)$ hat den Erwartungswert 0 und die Varianz Δt.

Man kann ihn interpretieren als stetige Version einer zufälligen Irrfahrt (also eines Random Walks, siehe SimuLab-Kurs „Weitere stochastische Simulationen"). Schauen wir uns den typischen Verlauf einer Brownschen Bewegung einmal an:



Pfad eines Wiener-Prozesses (einer Brownschen Bewegung)

Achtung: Dies ist nur **ein** möglicher Verlauf (ein sogenannter **Pfad**) einer Brownschen Bewegung (die bei uns immer in $W(0) = 0$ startet); der tatsächliche Verlauf hängt jedes Mal vom Zufall ab.

[1]benannt nach **Norbert Wiener**, 1894-1964, amerikanischer Mathematiker und Erfinder der **Kybernetik**, also der Wissenschaft von der Struktur hochkomplexer Systeme

Bemerkung (für mathematisch Vorgebildete):

Übrigens sind diese Pfade einer Brownschen Bewegung mathematisch hochinteressant. Es handelt sich „in der Regel“ („fast sicher“) um Funktionen, die zwar einerseits stetig sind, aber zugleich **an keiner einzigen Stelle differenzierbar**.

Ein solcher **Wiener-Prozess** liefert uns nun sozusagen den **Grundbaustein** für die Modellierung unserer Aktienkurse.

Da die dahinterliegende Mathematik sehr kompliziert ist (man kann sie erst im Mathe-Hauptstudium verstehen, nachdem man sich ausführlich mit Wahrscheinlichkeitstheorie und Analysis beschäftigt hat), sei hier nur das Ergebnis genannt:

Der Aktienkurs zum Zeitpunkt t wird modelliert als

$$(*) \quad S(t) = S(0) \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}.$$

Einen Prozess von dieser Gestalt nennt man **Geometrische Brownsche Bewegung**.

Man erhält daraus insbesondere:

$$\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)} = e^{\underbrace{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma(W(t+\Delta t) - W(t))}_{=:Y(t)}},$$

und $Y(t)$ ist in der Tat normalverteilt, so wie wir es haben wollten, d.h.

$$\ln\left(\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}\right)$$

ist normalverteilt. Man sagt dann auch: $\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}$ ist **lognormalverteilt**.

Man kann zeigen, dass der durch (*) definierte Aktienprozess die Lösung der sogenannten **Stochastischen Differentialgleichung**

$$dS(t) = \mu\, S(t)\, dt + \sigma\, S(t)\, dW(t)$$

ist; aber das ist für uns im Moment viel zu kompliziert!

Wir können diese Gleichung jedoch in eine diskrete Version bringen und diese benutzen, um uns daraus eine Rekursionsgleichung (das sogenannte **Euler-Schema**) zu basteln, mit deren Hilfe wir Aktienkurse dann stochastisch simulieren können:

Ersetzen wir die Differentiale durch diskrete Änderungen, so erhalten wir:

$$S(t+\Delta t) - S(t) = \mu\, S(t)\, \Delta t + \sigma\, S(t)\, \underbrace{(W(t+\Delta t) - W(t))}_{\sqrt{\Delta t}\cdot Z(t)},$$

wobei $Z(t)$ standardnormalverteilt ist.

Daraus basteln wir uns nun unsere Rekursion!

Setze:

$$\begin{aligned}
S_0 = S(0) \quad &: \quad \text{(heutiger Aktienkurs)} \\
T \quad &: \quad \text{Fälligkeitszeitpunkt} \\
M \quad &: \quad \text{Anzahl der Zeitschritte} \\
\Delta t = \frac{T}{M} \quad &: \quad \text{Länge eines Zeitintervalls} \\
t_i = i \cdot \Delta t \quad &: \quad i\text{-ter Zeitpunkt} \\
S_i = S(t_i) \quad &: \quad \text{Aktienkurs zum } i\text{-ten Zeitpunkt}\,.
\end{aligned}$$

Dann erhalten wir rekursiv als Näherungslösung der stochastischen Differentialgleichung

$$S_{i+1} = S_i + \mu S_i \Delta t + \sigma S_i \sqrt{\Delta t} Z_i,$$

wobei Z_i eine standardnormalverteilte Zufallszahl ist, die wir im i-ten Schritt erzeugen.

Hierbei ist μ der sogenannte **Marktdrift** und σ die **Volatilität** des Aktienprozesses. Eine Interpretation dieser Größen bekommt man, wenn man die Rekursionsgleichung umschreibt:

$$\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i\,.$$

Dann ist $\mu\Delta t$ der Erwartungswert des Quotienten

$$\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}$$

und $\sigma^2\Delta t$ dessen Varianz.

Wie können wir nun **ganz konkret** Aktienkurse simulieren?

1. Schritt: Gebe dir die Daten T, M, σ, S_0 und μ vor.

2. Schritt: Erzeuge (zum Beispiel mit Marsaglias Polar-Methode) M standardnormalverteilte Zufallszahlen

$$Z_0,\, Z_1,\, \ldots,\, Z_{M-1}\,.$$

3. Schritt: Berechne rekursiv für $i = 0, 1, \ldots, M-1$:

$$S_{i+1} = S_i + \mu S_i\Delta t + \sigma S_i\sqrt{\Delta t}Z_i.$$

mit $\Delta t = \frac{T}{M}$.

Aufgabe 5:

Schreibe ein Programm zur Simulation von Aktienkursen. Verwende dabei dein bereits fertiges Programm zu Marsaglias Polar-Methode für die Erzeugung standardnormalverteilter Zufallszahlen.

Erzeuge zu den Parametern

$$\begin{aligned} S_0 &= 50 \\ T &= 1 \\ M &= 300 \\ \mu &= 0.05 \\ \sigma &= 0.3 \end{aligned}$$

fünf Pfade des Aktienkurses und plotte sie.

Erzeuge nun 10000 Pfade und bilde den Mittelwert der Kurse $S(T)$ der Aktie zum Endzeitpunkt (also nach einem Jahr).

Es stellt sich nun die Frage, wie man in der Praxis an Werte wie μ und σ kommt. Ein mögliches Verfahren besteht darin, σ entweder aus historischen Daten oder aus den bestehenden Optionspreisen am Markt (also implizit) zu schätzen. In jedem Fall muss man die Parameter am Markt mit statistischen Verfahren schätzen; sie werden einem nicht von Gott gegeben.

Wir wollen uns nun die Möglichkeit genauer anschauen, auf Grund der Betrachtung der Historie die (Jahres-)Volatilität σ zu schätzen. Wir wissen, dass

$$\ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)$$

normalverteilt ist mit Varianz

$$\sigma^2 \Delta t = \frac{\sigma^2}{M}.$$

Demzufolge können wir $\frac{\sigma^2}{M}$ über die (aus dem Kurs „Weitere stochastische Simulationen“ bereits bekannte) **empirische Stichprobenvarianz** schätzen:

$$(*) \quad \frac{\hat{\sigma}^2}{M} = \frac{1}{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \left[\ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) - \bar{S} \right]^2,$$

wobei

$$\bar{S} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)$$

das empirische Stichprobenmittel ist. Das „Dach“ über dem σ soll andeuten, dass es sich bei $\hat{\sigma}$ um einen **Schätzer** für σ (aus den historischen Daten) handelt. Die Gleichung $(*)$ kann man dann natürlich anschließend durch Teilen durch M und Wurzelziehen nach $\hat{\sigma}$ auflösen. Über die Beziehung

$$\frac{\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}}{M} = \bar{S}$$

erhält man dann auch einen Schätzer für μ.

Gruppenaufgabe:

Schätze den Marktdrift und die (Jahres-)Volatilität der T-Aktie für den Zeitraum vom 20.10.2003 bis zum 19.10.2004. Verwende diese Schätzer für eine stochastische Simulation der t-Aktie mit Hilfe deines Programms aus Aufgabe 5.

Natürlich können wir nun, ähnlich wie beim Binomialmodell, wieder mit einer stochastischen Simulation faire Optionspreise näherungsweise bestimmen.

Das grundlegende Verfahren ist das folgende, am Beispiel eines europäischen Calls mit Ausübungspreis E und Laufzeit T dargestellt:

Monte-Carlo-Simulation zur Bestimmung eines fairen Preises eines europäischen Calls

1. Schritt: Simuliere N-mal stochastisch mögliche Aktienkurse, so wie oben beschrieben. Man erhält dann N simulierte Endwerte der Aktie:

$$S^{(1)}(T),\, S^{(2)}(T), \ldots, S^{(N)}(T).$$

2. Schritt: Berechne den jeweiligen Wert der Auszahlungsfunktion

$$V^{(k)}(T) = (S^{(k)}(T) - E)^+ \qquad (k = 1, 2, \ldots, M)$$

3. Schritt: Bilde den Mittelwert

$$\hat{V}(T) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} V^{(k)}(T)$$

4. Schritt: Zinse auf den heutigen Tag ab:

$$\hat{V}(0) = e^{-rT} \cdot \hat{V}(T).$$

Dann ist $\hat{V}(0)$ ein Näherungswert für den heutigen fairen Preis der Option.

Gruppenaufgabe:

Verwende dein Programm aus Aufgabe 5 und berechne für $N = 10000$ Simulationsschritte den ungefähren fairen Preis eines Europäischen Calls mit einem Ausübungspreis $E = 44$. Die restlichen Daten seien dieselben wie in Aufgabe 5.

Bemerkung:

Wie ihr vielleicht gesehen habt, schwankt der durch Simulation ermittelte Optionspreis doch sehr stark, auch wenn man die Anzahl der Simulationen sehr hoch wählt, d.h. die Varianz ist relativ hoch. Um die Genauigkeit der Simulation zu verbessern und so die Effizienz zu steigern, gibt es zahlreiche Methoden der Varianzreduktion, u.a. die sogenannte Methode der **antithetischen Variablen**, bei der man zur Simulation mit einer Zufallszahl Z auch $-Z$ verwendet und die beiden dadurch simulierten Aktienpreise $S(T)$ mittelt. Darauf wollen wir aber an dieser Stelle nicht näher eingehen.

Kapitel 6

Optionsbewertung nach Black-Scholes

Wie wir gesehen haben, liefert die stochastische Simulation nur mit relativ großer Streuung faire Optionspreise und dauert zudem, wenn man zu einer akzeptablen Genauigkeit und Zuverlässigkeit kommen möchte, viel zu lange. In einem Finanzmarkt, wo es fortlaufend auf Sekunden an Schnelligkeit und Cents an Genauigkeit ankommt (denn wenn Zehntausende Optionsscheine den Besitzer wechseln, machen sich wenige Cents pro Optionspreis schnell als Tausende von Euro insgesamt bemerkbar), wäre dieses Verfahren äußerst unbefriedigend.

Zum Glück haben die US-Finanzwissenschaftler **Robert Merton** (Harvard) auf der einen sowie **Myron Scholes** und **Fischer Black** (beide Stanford) auf der anderen Seite zeitgleich und unabhängig voneinander Anfang der 70er Jahre eine explizite Formel entwickelt, mit der man (innerhalb des Modells präzise!) den fairen Preis einfacher europäischer Aktienoptionen (und anderer einfacher Derivate) berechnen kann.

Black und Scholes haben gezeigt, dass der Wert einer europäischen Option die eindeutig bestimmte Lösung der partiellen Differentialgleichung (der sogenannten **Black-Scholes-Gleichung**)

$$\boldsymbol{\frac{\partial V}{\partial t}(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(t,s) + rs\frac{\partial V}{s}(t,s) - rV(t,s) = 0} \ ,$$

unter den **Randbedingungen**

$$\boldsymbol{V(t,0) = 0 \qquad \text{für alle} \quad 0 \leq t \leq T,}$$

sowie

$$\boldsymbol{\lim_{s\to\infty} V(t,s) = 0 \quad \text{für alle} \quad 0 \leq t \leq T \qquad \text{und} \qquad V(T,s) = \max\{E-s, 0\}}$$

für einen **europäischen Put** und

$$\boldsymbol{\lim_{s\to\infty} \frac{V(t,s)}{s} = 1 \quad \text{für alle}\, 0 \leq t \leq T \qquad \text{und} \qquad V(T,s) = \max\{s-E, 0\}}$$

für einen **europäischen Call**, ist.

Die **eindeutige Lösung** dieser partiellen Differentialgleichung ist im Falle eines **europäischen Calls** gegeben durch

$$\boldsymbol{V^{\text{Call}}(t,s) = s\Phi(d_1(t,s)) - Ee^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2(t,s))}$$

und im Falle eines **europäischen Puts** durch

$$\boldsymbol{V^{\text{Put}}(t,s) = Ee^{-r(T-t)}\,\Phi(-d_2(t,s)) - s\Phi(-d_1(t,s)),}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und

$$\boldsymbol{d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\ln\left(\frac{s}{E}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\}}$$

sowie

$$\boldsymbol{d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t}}$$

sind.

Speziell für $t = 0$ erhalten wir die berühmte **Formel von Black-Scholes**:

Formel von Black-Scholes

Der heutige faire Preis für eine europäische Option mit Ausübungspreis E und Fälligkeitszeitpunkt T beträgt:

$$V(0, S_0) = \begin{cases} S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}E\Phi(d_2) & \text{im Falle einer Call-Option,} \\ e^{-rT}E\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1) & \text{im Falle einer Put-Option,} \end{cases}$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

und

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

sind.

Für die 1973 durch Black und Scholes erstmals veröffentlichte partielle Differentialgleichung, deren Lösungsformel (vorher wurde die Veröffentlichung von zwei reputierten Zeitschriften abgelehnt!) und die Modellierung haben Merton (der Ähnliches zeitgleich und unabhängig von Black/Scholes entwickelt hatte) und Scholes **im Jahre 1996 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften** erhalten (Black war bereits 1995 verstorben).

Die heute zumeist gelehrte Beweisidee zum Finden der partiellen Differentialgleichung ist ganz grob und stark vereinfachend die folgende (der ursprüngliche Beweis von Black/Scholes war wesentlich unmathematischer und eher ökonomisch motiviert):
Man konzipiert nur mit dem Kauf/Verkauf der Aktie und der Option eine Handelsstrategie, die keine Volatilität besitzt und daher die gleiche sein muss wie die, bei der man das Geld sicher zum Tagesgeldkonto bringt und dort ruhen lässt. Aus dem Vergleich kann man dann Rückschlüsse ziehen. Als mathematisch-technisches Hilfsmittel wird der sogenannte **Itô-Kalkül** der sogenannten **Stochastischen Analysis** benötigt. Diese Bemerkung diene nur als Ausblick und Motivation für euch, euch weiterhin mit der Wahrscheinlichkeitstheorie zu beschäftigen!

Man sieht anhand der Formel, dass der faire Preis einer europäischen Option von den folgenden Faktoren abhängt:

- dem aktuellen Aktienkurs,
- dem Ausübungspreis der Option,
- dem risikolosen Zinssatz,
- der Laufzeit der Option und
- der Volatilität.

Aufgabe 6:

Schreibe auf der Excel-Oberfläche (nicht in Visual Basic) ein kleines Programm, das den Optionspreis eines europäischen Calls und Puts –bei vorheriger Eingabe der Parameter (aktueller Aktienkurs, Ausübungspreis, Laufzeit, Volatilität, risikoloser Zinssatz) durch den Nutzer– berechnen kann.

Untersuche (wie bereits im Binomialmodell) den Einfluss der Parameter auf den Optionspreis.

Man sieht unter anderem, dass die folgenden Faktoren den Optionspreis nach oben treiben:

- ein hoher aktueller Kurswert im Vergleich zum Ausübungspreis, da es dann wahrscheinlicher ist, dass der Aktienkurs am Schluss den Ausübungspreis übersteigt,
- eine lange Laufzeit der Option, weil dann das Risiko sehr hoher Aktiensprünge nach oben (und damit hoher Verluste des Stillhalters der Option) steigt,
- eine hohe Volatilität, aus dem gleichen Grund wie bei der langen Laufzeit,
- ein hoher Zinssatz.

Ich möchte den Kurs mit ein paar Bemerkungen schließen. Die meisten der Bemerkungen sollten eigentlich Anlass für ein neues Kapitel bzw. ein Arbeitsblatt geben, können aber an dieser Stelle aus Zeitgründen nur ganz kurz angeschnitten werden. Ich wollte diese wichtigen Fakten dennoch auch in einem einführenden zweitägigen Kurs zur stochastischen Finanzmathematik nicht unerwähnt lassen:

(1) Mit welchem Einfluss die Parameter genau auf die Optionspreise wirken, kann man mit Hilfe partieller Ableitungen des Optionspreises nach den jeweiligen Parametern (den sogenannten „**Greeks**") untersuchen. Man findet für europäische Optionen die expliziten Formeln der Greeks in jedem Lehrbuch zur stochastischen Finanzmathematik.

(2) Wie man sieht, nimmt (auf den ersten Blick etwas überraschend!) der Marktdrift μ aus der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t)$$

bzw. dem Euler-Schema

$$S_{i+1} = S_i + \mu S_i \Delta t + \sigma S_i \sqrt{\Delta t} Z_i,$$

gar keinen Einfluss auf den fairen Optionswert!

(3) Amerikanische Calls haben (ebenfalls auf den ersten Blick überraschend!) den gleichen Preis wie europäische Calls, wenn man keine Dividendenzahlungen zulässt. Dagegen gibt es für die Preise amerikanischer Puts keine so schöne explizite Formel. Für diese benötigt man also kompliziertere numerische Verfahren. In jedem Fall sind amerikanische Puts teurer als europäische Puts.

(4) Die Preise europäischer Puts und Calls sind über die sogenannte **Put-Call-Parität**

$$\boldsymbol{V^{\mathrm{Put}}(0) = E e^{-rT} + V^{\mathrm{Call}}(0) - S_0}$$

miteinander verknüpft. Das könnt ihr auch selber einsehen, wenn ihr die Black-Scholes-Preisformeln für beide Optionen mal einsetzt und beachtet, dass immer $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ gilt.

(5) Das zuvor besprochene Binomialmodell wurde von Cox, Ross und Rubinstein erst 1979 vorgestellt, ist also eine **spätere** Entwicklung als das Black-Scholes-Modell. Der Vorteil dieses Modells liegt darin: Es ist leicht programierbar, funktioniert auch für amerikanische Puts relativ einfach und es lassen sich mühelos Dividendenzahlungen und andere Extras einbauen. Mit steigender Anzahl M der Zeitschritte konvergiert der durch das Binomialmodell ermittelte Optionspreis gegen den Black-Scholes-Optionswert. Dies könnt ihr in dem excel-Programm `vergleich.xls` auch selber mal ausprobieren.

(6) Man könnte angesichts expliziter Black-Scholes-Lösungsformeln, gut approximierender Binomialmodelle und anderer numerischer Lösungsverfahren den Eindruck gewinnen, dass stochastische Simulationen in diesem Zusammenhang völlig sinnlos sind, da sie ungenaue Werte mit zudem relativ großen Schwankungen liefern. Dies stimmt für solche einfachen Optionen auch! Dennoch haben stochastische Simulationen in der Finanzmathematik eine äußerst wichtige Bedeutung! Bei allgemeineren Modellen und exotischen Optionen gibt es keine expliziten Lösungsformeln. Dort **muss** man also mit numerischen oder stochastischen Simulationen arbeiten. Gerade bei Modellen, wo neben dem Aktienkurs auch andere Prozesse als stochastisch angenommen werden (wie etwa ein stochastischer Zinssatz oder eine stochastische Volatilität), eignet sich die stochastische Simulation zur Optionspreisberechnung besonders gut und ist zum Teil der einzig sinnvolle Ansatz, um überhaupt näherungsweise einen Optionspreis berechnen zu können.