

Schüler-SimuLab

Kurs 2

Kursreihe Simulationen in der Physik

Dynamische Systeme in der Physik

Stefan Hartmann

Forschungszentrum caesar

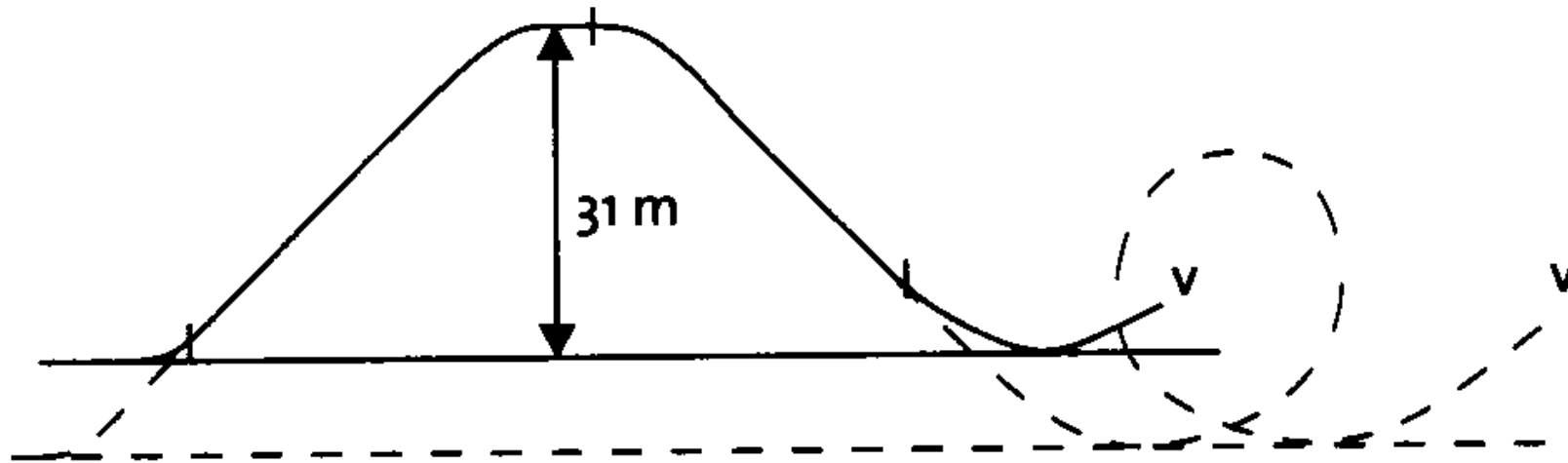
Simulation 1

**Konstruktion eines
Achterbahnloopings**



Achterbahn „Limit“ im Heidepark

(Inbetriebnahme 1999, max. Geschwindigkeit 80 km/h)



Wie kann man einen **Looping** einbauen?

Bedingungen an einen Looping:

Die Anpresskraft (an den Sitz) darf niemals negativ sein (sonst fällt man aus den Sitzen) und darf niemals das 4.5-Fache der Gewichtskraft übersteigen (sonst ist die Belastung zu groß), also:

$$0 \leq F_A \leq 4.5 \cdot F_G$$

Was aber ist die Anpresskraft und wie berechnet man sie?

Die **Anpresskraft** ist die Summe aus der Zentrifugalkraft und der Normalkomponente der Gewichtskraft.

Bei einem Kreis als Looping (mit Radius r) sind:

Zentrifugalkraft $F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$

Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$

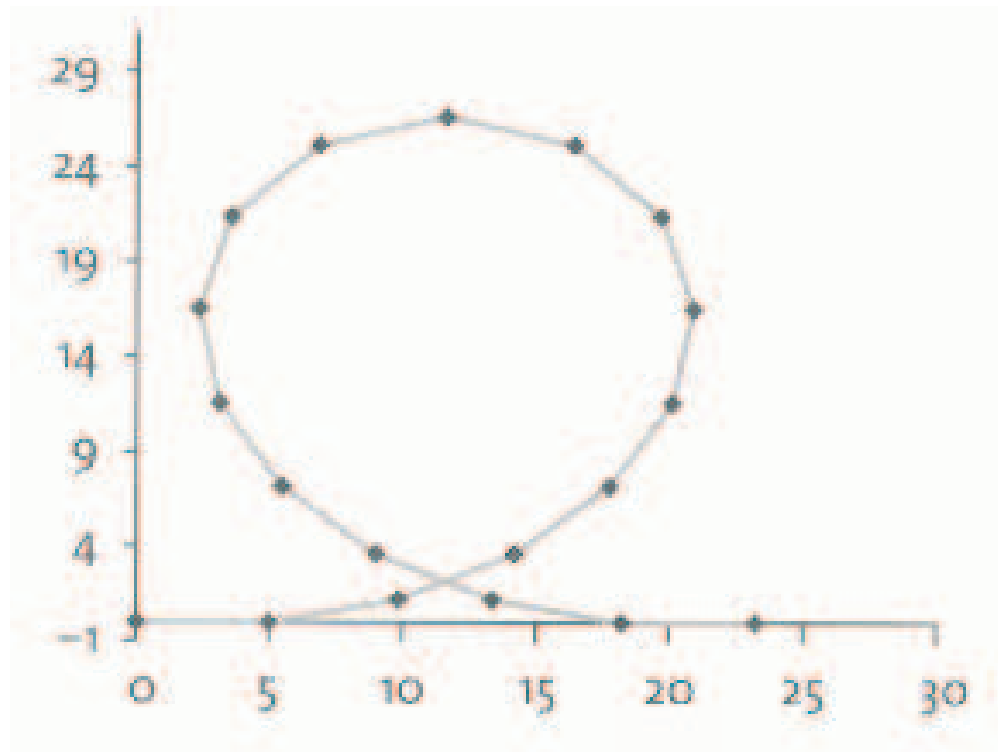
v : Geschwindigkeit

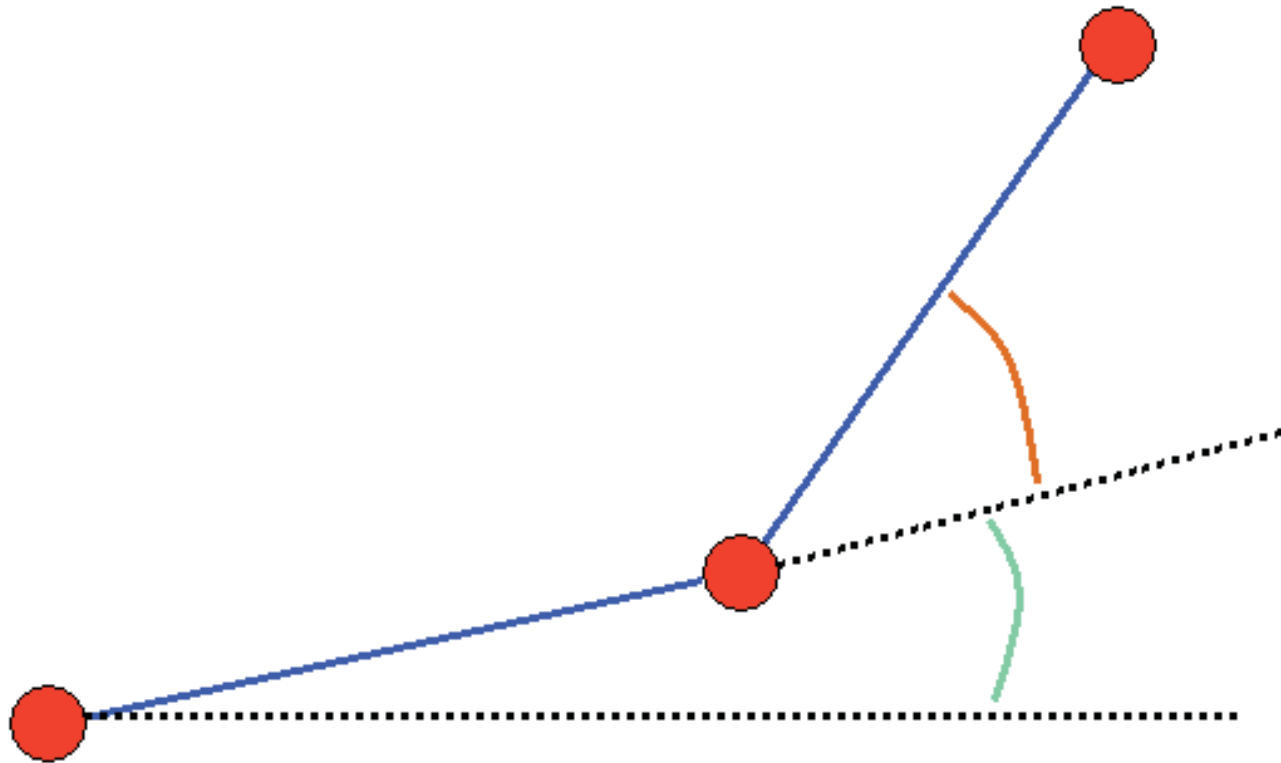
g : Erdbeschleunigung ($g = 9.81 \frac{m}{s^2}$)

m : Masse

Wie aber sieht es bei allgemeinen Bahnkurven aus?

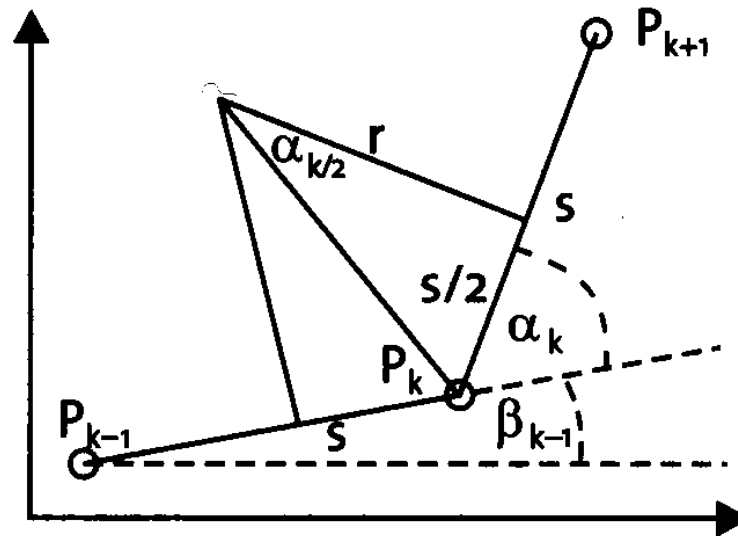
Approximiere eine beliebige Bahnkurve mit Geradenstücken der Länge s :





Sei $P_1 = (x_1, y_1) = (0, 0)$. Wie kann man nun P_{k+1} aus P_k berechnen?

Zunächst zur Zentrifugalkraft:
Annäherung durch einen Schmiegekreis

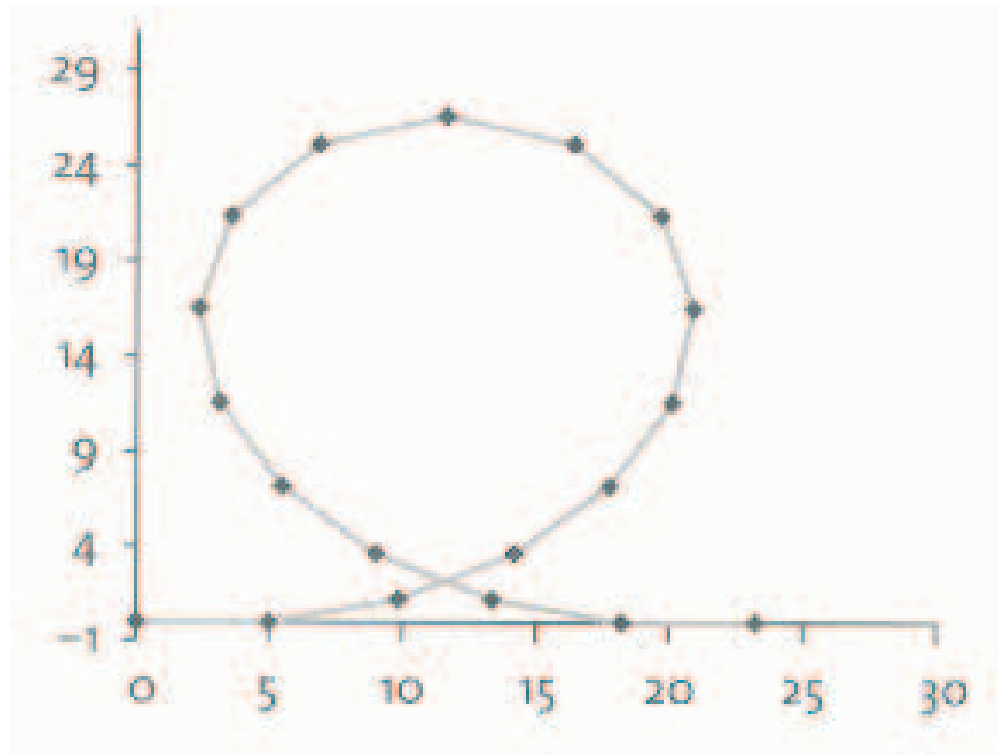


Zentrifugalkraft im Knotenpunkt P_k : $F_Z(k) = \frac{mv_k^2}{r_k}$,

v_k : Geschwindigkeit im Punkt P_k

r_k : Radius des Schmiegekrees im Punkt P_k

Nun zur Normalenkomponente F_N der Gewichtskraft:



$$F_N = F_G \cdot \cos(\beta_k)$$

Allgemein:

$$0 \leq F_A \leq 4.5 \cdot F_G$$

$$F_A = F_Z + F_N \quad (F_N: \text{Normalenkomponente von } F_G)$$

Hochpunkt: $F_N = -F_G$ (Anpresskraft am schwächsten)

Tiefpunkt: $F_N = F_G$ (Anpresskraft am stärksten)

Spezielle Bedingungen am Hoch- und Tiefpunkt:

(1) $F_Z \geq F_G$ (am Hochpunkt des Loopings)

(2) $F_Z + F_G \leq 4.5 \cdot F_G$ (am Tiefpunkt des Loopings)

Looping als Kreis?

Aufgabe 1:

- (a) Versuche im Excel-Sheet „Kreis“ den Radius und die Länge der Teilstrecken so zu setzen, dass das Verhältnis von Anpresskraft und Gewichtskraft stets zwischen 0 und 4,5 liegt.

Analyse:

Warum klappt das nicht mit dem Kreis?

Vereinfachung:

Vernachlässigung von Reibung und Luftwiderstand

⇒ **Gesamtenergie bleibt erhalten!**

Also:

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const.}$$

Hierbei sind:

potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

v : Geschwindigkeit

g : Erdbeschleunigung $(g = 9.81 \frac{m}{s^2})$

h : Höhe

m : Masse

Ort	Höhe	Geschwindigkeit
A: Spitze der Rampe	h	0
B: Tiefpunkt des Loopings	0	v_1
C: Hochpunkt des Loopings	$2r$	v_2

$$E_{\text{ges}}(A) = E_{\text{pot}}(A) + \underbrace{E_{\text{kin}}(A)}_{=0} = mgh$$

$$E_{\text{ges}}(B) = \underbrace{E_{\text{pot}}(B)}_{=0} + E_{\text{kin}}(B) = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$E_{\text{ges}}(C) = E_{\text{pot}}(C) + E_{\text{kin}}(C) = 2mgr + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Also:

$$E_{\text{ges}}(A) = E_{\text{ges}}(B) = E_{\text{ges}}(C)$$

$$\Leftrightarrow gh = \frac{1}{2}v_1^2 = 2gr + \frac{1}{2}v_2^2$$

$$(*) \quad gh = \frac{1}{2}v_1^2 = 2gr + \frac{1}{2}v_2^2$$

Bedingung: $F_Z(C) \geq F_G(C) \Rightarrow \frac{mv_2^2}{r} \geq mg \Rightarrow v_2^2 \geq gr$

Einsetzen in (*):

$$gh \geq 2gr + \frac{1}{2}gr = \frac{5}{2}gr \Rightarrow h \geq \frac{5}{2}r$$

Nochmaliges Einsetzen in (*):

$$\frac{1}{2}v_1^2 = gh \geq \frac{5}{2}gr \Rightarrow v_1 \geq \sqrt{5gr}$$

Konsequenz:

$$F_G(B) + F_Z(B) = mg + \frac{mv_1^2}{r} \geq mg + \frac{m \cdot 5rg}{r} = 6mg = 6F_G(B) > 4.5F_G(B)$$

Folgerung:

Entweder ist der Anpressdruck am Tiefpunkt zu groß oder die Passagiere fallen am Hochpunkt aus den Sitzen!

⇒ **Ein Looping darf niemals ein Kreis sein!**

Aufgabe 1:

(b) Passe im Excel-Sheet „Looping“ bei einer Teilstreckenlänge von 4,95 die Winkel α_k so an, dass das Verhältnis von Anpresskraft und Gewichtskraft stets zwischen 0 und 4,5 liegt.

Simulation 2

Tauchgangplanung

Problem beim Tauchen

Bei großen Tiefen herrscht hoher Umgebungsdruck. Der Druck, bei dem der Taucher die Atemluft einatmet, muss dem Umgebungsdruck angepasst werden.

Konsequenz:

Es reichert sich Stickstoff im Körper an!

Bei zu schnellem Auftauchen:

Bildung von Stickstoffbläschen im Körper

Ab einer gewissen Größe der Bläschen:

- „Taucherflöhe“ (Hautkribbeln)
- Kopfschmerzen
- Gelenkschmerzen
- schlimmstenfalls Tod

Regel:

Ist durch langes Tauchen in großen Tiefen Stickstoff im Körper angereichert, so gilt:

Je kleiner der Umgebungsdruck ist, desto gefährlicher sind die Bläschen!

⇒ **Langsames Auftauchen unbedingt nötig!**

Nur: Wie langsam?

Vorsichtsmaßnahme:

Taucher führen **(Auf-)Tauchtabelle**n mit sich:

Tauchdauer
maximale Tauchtiefe } \Rightarrow Tiefen und Dauern
der Auftauchpausen

Fachwort: Dekostopps (Deko=Dekompression)

Austauschtabelle DECO 2000

Stopp in	6	3	m
12	36		D
	54		E
	72		F
	90		G
140'	108		G
	24		D
	36		E
	48		E
15	60		F
	72		G
	84	4	G
	15		C
18	25		D
	35		E
	45		F
	55	4	F
45'	65	8	G
	75	14	G
	11		C
	21	16	
21			D
26			E
31			E
31'	36	2	F
	41	5	F
	46	7	F
	51	10	G
24	56	13	G
	61	17	G
	7		B
	23	11	
15			D
19			D
23			E
23'	27	2	E
	31	4	F
	35	7	F
	39	9	F
24	43	1	12 G
	47	2	14 G
	51	3	17 G
	55	5	19 G

Stopp in	9	6	3	m
27	6			B
	10			C
	14			D
	18			E
18'	22		2	E
	26		5	F
	30		8	F
	34	2	10	F
30	38	3	13	G
	42	5	15	G
	46	7	18	G
	50	9	21	G
15'	6			B
	9			C
	12			D
	15			D
30	18		2	E
	21		4	E
	24	1	6	F
	27	2	8	F
33	30	3	10	F
	33	5	12	G
	36	6	15	G
	39	1	7	17 G
12'	42	1	9	19 G
	6			C
	9			D
	12			D
33	15		2	E
	18		5	E
	21	1	7	F
	24	3	8	F
36	27	5	10	F
	30	1	5	13 G
	33	2	7	15 G
	36	3	8	18 G
10'	6			C
	10			D
	14		3	E
	18	2	5	F
36	21	3	8	F
	24	1	4	11 F
	27	2	6	13 G
	30	3	7	16 G
33	33	4	9	19 G

Stopp in	12	9	6	3	m
39	6				C
	9				D
	12			3	E
	15		1	5	E
9'	18		3	7	F
	21	1	5	9	F
	24	3	5	13	G
	27	4	7	16	G
42	4				C
	7				D
	10			2	E
	13		1	5	E
7'	16		4	6	F
	19	2	4	10	F
	22	3	6	13	G
	25	1	4	8	16 G
45	6				D
	8			1	D
	10			3	E
	12		2	4	E
6'	14	1	3	6	F
	16	2	3	9	F
	18	3	5	10	F
	20	1	3	6	13 G
48	22	2	4	7	15 G
	5				C
	7			1	D
	9		1	3	E
5'	11		2	5	E
	13	1	3	6	F
	15	2	4	9	F
	17	1	3	5	11 F
51	19	2	3	6	14 G
	21	3	4	7	17 G
	6			1	D
	8		1	3	E
5'	10		2	5	E
	12	1	3	7	F
	14	3	4	9	F
	16	1	3	6	11 F
51	18	2	4	7	14 G

Autor: Dr. Max Hahn
© VDST Verband Deutscher Sporttaucher

0 – 700m ü. N.N.
Aufstieg mit 10m/min

Beispiel: 33 Meter maximale Tiefe

Nullzeit: 12 Minuten ⇒ keine Pause notwendig

Jeder Tauchgang unter 12 Minuten ist also ein **Nullzeittauchgang**.

Nun Tauchzeit: **24 Minuten**

- Erster Dekostopp auf 6 Metern: 3 Minuten
- Zweiter Dekostopp auf 3 Metern: 8 Minuten

Beachte:

Die Tabellen gehen immer von

Worst-Case-Szenarien

aus!

Nur die **maximale Tiefe** wird berücksichtigt!

⇒ Verschwendung wertvoller Tauchzeit bei variablen Tauchgängen!

Ziel:

Individuelle Auftauchplanung bei variablen Tauchgängen, die trotzdem verlässlich sind!

⇒ **Verlängerung der Tauchzeit ohne Sicherheitseinbußen**

⇒ Entwicklung von Tauchcomputern

Genauere Problemanalyse:

„Gewollt“ ist der **Sauerstofftransport**



Aber: Auch die anderen Bestandteile der Luft lösen sich physikalisch im Blut!

Vor allem **Stickstoff**: Anteil an der Atemluft: 78%

Bei normalem konstantem Umgebungsdruck kein Problem, wohl aber bei schnellen Änderungen des Umgebungsdrucks

Gesetz von Henry:

Der gelöste Anteil eines Gases in einem Lösungsmittel ist proportional zum Partialdruck des Gases.

Partialdruck = Gasdruck · Prozentanteil

Der **Inertgasdruck** $n(t)$ des Stickstoff zum Zeitpunkt t ist der Partialdruck des Stickstoffs, der notwendig ist, um die gegebene Stickstoffkonzentration im Gewebe zum Zeitpunkt t zu erzeugen.

Problem im Falle

Inertgasdruck \gg Umgebungsdruck

\Rightarrow Es bilden sich Gasbläschen aus 100%-igem Stickstoff mit Partialdruck=Umgebungsdruck.

Ab einer gewissen Größe (Volumen) werden die Bläschen gefährlich.

Frage:

Ab welchem Inertgasdruck (bei bekanntem Umgebungsdruck) wird es gefährlich?

Vorüberlegung:

Die Stickstoffmenge in den Bläschen ist im Falle $n(t) > P$ proportional zu

$$n(t) - P.$$

P : Umgebungsdruck

Für das **Volumen der Bläschen** gilt:

$$V = \frac{c \cdot (n(t) - P)}{P}.$$

Berechnung des kritischen Inertgasdruckes

$$V_{\max} = \frac{c \cdot (n_{\max} - P)}{P}$$

$$\Rightarrow n_{\max} = \frac{P \cdot V_{\max}}{c} + P = \left(\frac{V_{\max}}{c} + 1 \right) \cdot P$$

proportional zu P

Konsequenzen:

Entweder Nullzeittauchgänge:

Tauche so kurz und flach, dass erst gar nicht zu viel Stickstoff aufgenommen werden kann!

Oder Dekompressionstauchgänge:

„Atme“ den Stickstoff durch geeignete Pausen rechtzeitig „ab“!

Das Modell

Druck bei Tauchtiefe T (in m):

$$P = 1 + 0.1 \cdot T \quad (\text{in Bar})$$

Stickstoffinertgasdruck des Blutes, welches die Lunge verlässt,
in Tauchtiefe T :

$$n_b(t) = 0.78 \cdot P = 0.78 \cdot (1 + 0.1 \cdot T)$$

Änderung des Stickstoffinertgasdrucks $n(t)$ des Gewebes:

$$\dot{n}(t) = k \cdot (n_b(t) - n(t))$$

Euler-Diskretisierung:

$$n(t + \Delta t) \approx n(t) + \Delta t \cdot k \cdot (n_b(t) - n(t))$$

k : Aufnahme-/Abnahmerate

Achtung:

$n_b(t)$ ist **nicht konstant**, sondern ändert sich mit der Tauchtiefe!

Bemerkung:

Im Allgemeinen kann man nicht davon ausgehen, dass

$$\text{Aufnahmerate} = \text{Abgaberate}$$

gilt. Wir wollen das hier aber der Einfachheit halber tun!

Weiterhin hat jedes Gewebe eigentlich seine eigenen Parameter und muss getrennt modelliert werden, aber wir gehen hier immer nur von einem Gewebe (dem „Leitgewebe“) aus.

Berechnung des kritischen Wertes n_{\max} über

$$n_{\max} = \text{Kap} \cdot P$$

Kap ist eine noch zu ermittelnde Konstante!

Parameterschätzung

Wir haben nun ein schönes Modell:

$$\dot{n}(t) = k \cdot (n_b(t) - n(t))$$

$$n(t) \stackrel{!}{<} n_{\max} = \text{Kap} \cdot P,$$

aber wie kommen wir an die Parameter k und Kap ?

Idee:

Wir passen die Parameter so an, dass sie die Nullzeittauchgänge der Auftauchtabelle gut erklären, d.h. dass bei allen (gerade eben noch erlaubten) Nullzeittauchgängen der Stickstoffpartialdruck im (Leit-)Gewebe möglichst nah unter dem kritischen Wert liegt.

Aufgabe 2:

- (a) Passe im Excel-Sheet „Tabelle 1“ für $\Delta t = 1$ die Parameter $k_1 = k_2$ und Kap so an, dass der Stickstoffpartialdruck im Leitgewebe bei allen Tiefen möglichst nah unter dem kritischen Wert liegt.
- (b) Nutze die Parameter aus (a), um die Tauchtabelle für verschiedene Tauchtiefen mit Hilfe des Excel-Sheets „Tabelle 2“ zu überprüfen: Bleiben wir immer unterhalb des kritischen Wertes? Versuche eine ähnliche Tabelle mit Dekompressionszeiten für 54m Tauchtiefe und 12 Minuten Tauchdauer (in tiefster Tiefe) zu erstellen (Tauchgang 15). Tauche dabei zunächst auf 9m auf.

Simulation 3

Rangierhilfe

für einen LKW



Problem:

Rückwärtseinparken für LKWs mit 2-achsigem Anhänger

Grund: bei Vorwärtsfahrten werden kleine Ungenauigkeiten ausgeglichen, bei Rückwärtsfahrten führen sie bald zu einem völligen Verkeilen

Ziel:

Entwicklung einer computergestützten Rangierhilfe, die Lenkbefehle erteilt und kleine Fehler korrigiert!

Idee:

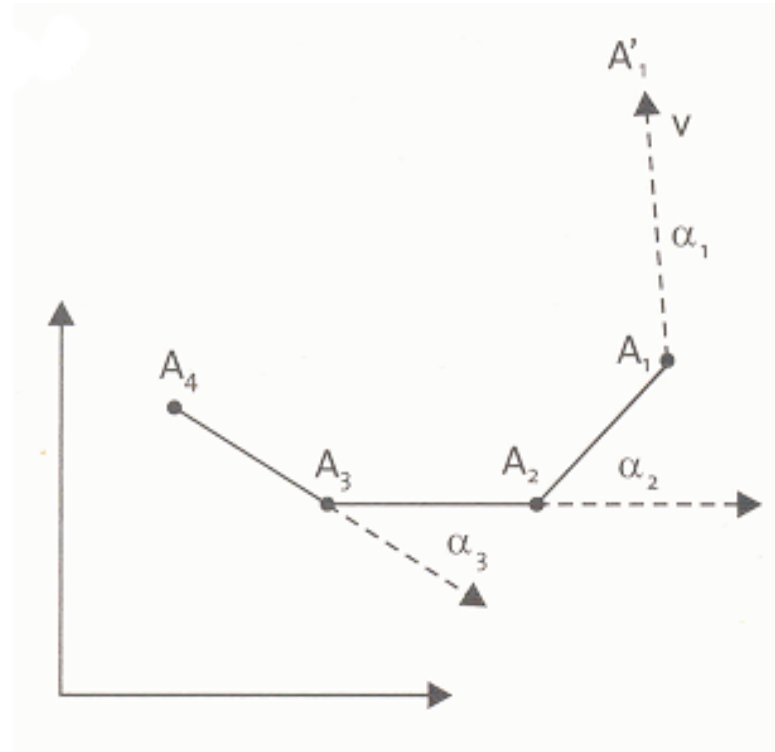
Jede Lenkstrategie zum Rückwärtsfahren kann auch zum Vorwärtsfahren verwendet werden.

- ⇒ Aus jeder Parklücke, in die man rückwärts hineinfahren kann, kann man auch vorwärts wieder herausfahren und umgekehrt!
- ⇒ **Fahrer simuliert am Computerdisplay die Vorwärtsfahrt von der gewünschten Zielposition zur Startposition, die Rangierhilfe berechnet daraus die Lenkbefehle für die Rückwärtsfahrt!**

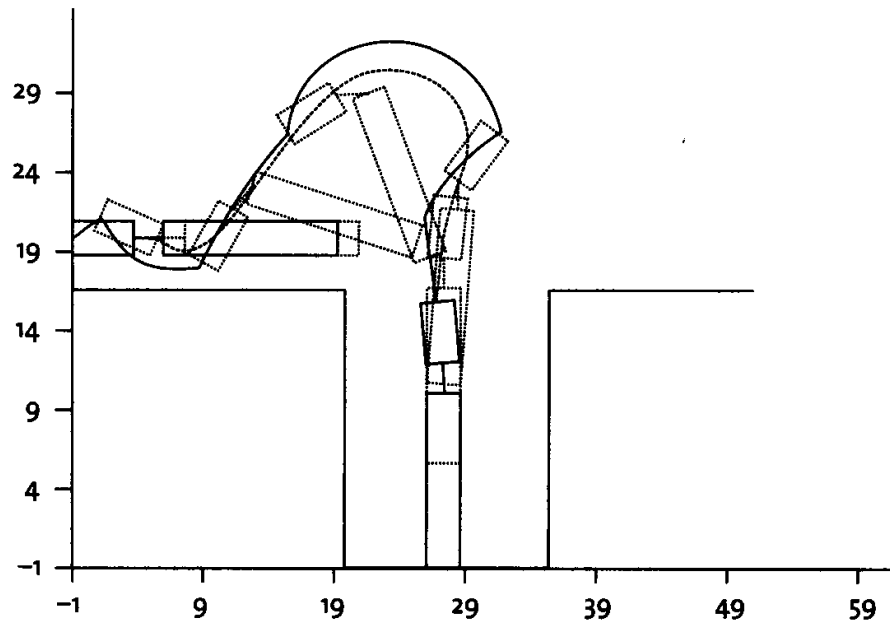
Es genügt die Positionen der vier Achsen A_1 bis A_4 zu kennen!

Steuerung über den Winkel $\alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

(Radstellung der Frontachse zur Längsachse des Zugfahrzeuges):



Testmanöver: Rückwärtseinfahrt in einen Hof (90°-Winkel):



Aufgabe 3:

- (a) Versuche in die Hofeinfahrt mit maximal sechs Änderungen der Lenkeinstellungen rückwärts einzufahren, ohne dass es zu Verkeilungen/Kollisionen des Zugfahrzeuges mit dem Anhänger kommt.
- (b) Versuche nun vorwärts in die Hofeinfahrt einzufahren. Stelle dazu die Startposition des LKW wie folgt ein: $x_1 = 40$, $y_1 = 20$. Beachte bitte, dass die Strecken nun positiv sind, d.h. du musst das negative Vorzeichen in den Zellen B10, B12, B14, B16, B18 und B20 löschen.